WALDECYR C. DE ARAÚJO PEREIRA

CURSO MODERNO DE MATEMÁTICA

1.º Volume

(ARITMÉTICA)

EDIÇÃO DA SECÇÃO DE MIM
DO
"CURSO ARAÚJO DE MA
AV. CONDE DA BOA
Recife - Perna
19

WALDECYR C. DE ARAÚJO PEREIRA

CURSO MODERNO DE MATEMÁTICA

1.º Volume

(ARITMÉTICA)

EDIÇÃO DA SECÇÃO DE MIMEOGRAFIA
DO
"CURSO ARAÚJO DE MATEMÁTICA"
AV. CONDE DA BOA VISTA, 767
Recife - Pernambuco
1962

I N D I C E

ALGUMAS PALAVRAS

Êste trabalho foi escrito para você, que encontra dificuldades em compreender a Matemática .

As suas necessidades, seus problemas e suas aspirações, serviram para inspirar e estabelecer o roteiro seguido. A todo instante, troquei idéias com você, solicitando sugestões. Fiz o possível para ajudá-lo .

E lembro mais uma vez, o que Thordyke, Muller e tantos outros afirmam : " que a aversão sentida pela maioria das pessoas no tocante aos problemas do número e da forma, é devido ao modo pelo qual tais conhecimentos lhes foram inculcados, quer nas aulas de primeiras letras, quer em cursos mais adiantados " .

Compreendo que o modesto trabalho realizado, não corresponde 100 % as suas aspirações e expectativas, mas, posso afirmar que, se você fôr perseverante e procurar seguir, dentro do possível os conselhos sugeridos, em pouco tempo, o seu nome estará incluído entre os apaixonados da linguagem das grandezas .

O AUTOR

Recife- Pernambuco

Fundou o Curso Araújo em 1952, com o objetivo de despertar nos jovens o gôsto pelos estudos de Matemática .

Foi professor de Didática Especial de Matemática, da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade Católica de Pernambuco (1957 e 1958) .

Inscrito no Concurso para provimento efetivo da Cadeira de Matemática do Colégio Estadual de Pernambuco (1958) .

A convite da Embaixada da França (Direction Générale des Affaires Culturelles et Techniques), estagiou no Centre International d'Études Pédagogiques de Sèvres (1959).

A convite do Ministério de Instrução Pública da Bélgica, estagiou em Bruxelas (1959).

Participou ativamente e com trabalhos , nos seguintes encontros de educadores :

Seminário da Escola Primária, iniciativa do Instituto de Pesquisas Pedagógicas (Recife-1958)

1º Simpósio do Ensino Normal do Estado de Pernambuco, iniciativa do Departamento de Educação média (Recife- 1958).

3º Congresso Brasileiro do Ensino da Matemática (Rio - 1959) .

IV Congresso Nacional de Professôres Primários (Recife - 1960) .

Encontro Nacional de Educadores para o Desenvolvimento da 3ª Região (Recife - 1960).

V Congresso Nacional de Professôres Primários (Goiânia - 1962).

Introduziu no Brasil o material Cuisenaire, durante a realização do 3º Congresso Brasileiro de Ensino da Matemática (Rio - 1959).

Organizou a 1ª Exposição do Ensino de Matemática, durante a realização do IV Congresso o(Nacional) de Professôres Primários (Recife - 1960)

Organizou a 2ª Exposição do Ensino de Matemática e que funcionou no Teatro Parque (1962).

Foi elogiado pelo Secretário de Estado dos Negócios de Educação e Cultura através da Portaria nº 2949 de 10/12/1957, pelo "zêlo, dedicação e noção de responsabilidade demonstrados nos vários Cursos de Aperfeiçoamento do Professorado Primário do Estado " .

Ministrou os seguintes cursos :

-Curso de Aperfeiçoamento de Diretoras, a convite do Departamento Técnico de Educação Primária. (Recife- 1959).

-Curso de Aperfeiçoamento de Professôres de Matemática do Curso Secundário, a convite da C.A.D.E.S (Recife- 1960)

-Curso Intensivo de Aperfeiçoamento de Professorandas, a convite do Centro Regional de Pesquisas Educacionais do Recife (1960)

-Curso Intensivo de Aperfeiçoamento do Magistério Primário de Pernambuco, a convite do Centro Regional de Pesquisas Educacionais de Pernambuco (1961)

-Curso Intensivo de Aperfeiçoamento do Magistério Primário de Pernambuco, a convite do Serviço Social da Indústria (SESI - 1961)

- Cursos de Conteúdo e Didática Especial de Matemática, para professôres de Matemática do Ensino Secundário, a convite da C.A.D.E.S. (1961)

- Curso de Didática Especial de Matemática, para professôres do Ensino Comercial, a convite da C.A.E.C. (1961)

- Curso Intensivo de Didática Especial de Matemática, para o professorado do Estado da Guanabara (agôsto - 1961).

- Professor do Curso Intensivo de Matemática do II Curso de Desenvolvimento Econômico , a convite da S U D E N E (1962)

LIVROS PUBLICADOS :

1966 -
- CURSO MODERNO DE MATEMÁTICA (2 volumes) (Aritmética e Noções de Geometria)
- Matemática Dinâmica com Números em Côres.
- Da Resolução dos Problemas de Matemática

INTRODUÇÃO HISTÓRICA

A história da Matemática teve início , quando o homem começou a contar. O seu desenvolvimento se processou através dos tempos, acompanhando a evolução da sociedade e o crescente aumento das necessidades do homem. A ânsia de calcular os seus pertences, de medir a terra, perscrutar o céu e suas relações com o seu destino, a necessidade de comerciar, de navegar, levou-o a ampliar os seus conhecimentos matemáticos .

Com o rico material de que dispomos da civilização babilônica, observamos que ela possuía um sistema de numeração bastante desenvolvido; tábuas de multiplicação, de divisão, de quadrados e noções sôbre raízes quadradas .

Quanto à antiga cultura egípcia, conhecida hoje através de cinco papiros, dos quais o mais importante é o Rhind, escrito pelo escriba Ahmés, podemos afirmar que não conhecia os algarismos e possuía um sistema ilógico para a representação dos números.

O <u>um</u> se representava com uma vara de medir. O <u>dez</u> com um braço estendido ; o <u>cem</u> com uma folha de palma enrolada, o <u>mil</u> com uma flor de lotus e o <u>dez mil</u> com um dedo. O <u>milhão</u> era representado por uma rã, sem dúvida pela grande quantidade de dêstes batráquios, que abundavam no Egito, por ocasião das inundações do Nilo .

Na Grécia, a aritmética se desenvolveu .

Os pitagóricos, classificaram os números em pares e ímpares e designaram de números perfeitos aquêles como . 6 e 28 (6= 1+2+3)(28= 1+2+4+7+ + 14), que são iguais à soma de suas partes alíquotas. Estudaram ainda os números amigos, que são aquêles como : 220 e 284, cada um dos quais é a soma das partes alíquotas do outro .

Segundo Proclo, Euclides foi um sábio que floresceu no ano 300 A.C. e que publicou numerosas obras científicas, destacando-se entre elas, os célebres elementos, cuja importância científica e didática se evidencia ante o fato de que, até a bem poucos anos eram ainda utilizados como texto

Foi elogiado pelo Secretário de Estado dos Negócios de Educação e Cultura através da Portaria nº 2949 de 10/12/1957, pelo "zêlo, dedicação e noção de responsabilidade demonstrados nos vários Cursos de Aperfeiçoamento do Professorado Primário do Estado ".

Ministrou os seguintes cursos :

-Curso de Aperfeiçoamento de Diretoras, a convite do Departamento Técnico de Educação Primária. (Recife- 1959).

-Curso de Aperfeiçoamento de Professôres de Matemática do Curso Secundário, a convite da C.A.D.E.S (Recife- 1960)

-Curso Intensivo de Aperfeiçoamento de Professorandas, a convite do Centro Regional de Pesquisas Educacionais do Recife (1960)

-Curso Intensivo de Aperfeiçoamento do Magistério Primário de Pernambuco, a convite do Centro Regional de Pesquisas Educacionais de Pernambuco (1961)

-Curso Intensivo de Aperfeiçoamento do Magistério Primário de Pernambuco, a convite do Serviço Social da Indústria (SESI - 1961)

— Cursos de Conteúdo e Didática Especial de Matemática, para professôres de Matemática do Ensino Secundário, a convite da C.A.D.E.S. (1961)

— Curso de Didática Especial de Matemática, para professôres do Ensino Comercial, a convite da C.A.E.C. (1961)

— Curso Intensivo de Didática Especial de Matemática, para o professorado do Estado da Guanabara (agôsto - 1961).

— Professor do Curso Intensivo de Matemática do II Curso de Desenvolvimento Econômico , a convite da S U D E N E (1962)

LIVROS PUBLICADOS :

-CURSO MODERNO DE MATEMÁTICA (2 volumes)

1966 - (Aritmética e Noções de Geometria)

-Matemática Dinâmica com Números em Côres

-Da Resolução dos Problemas de Matemática

INTRODUÇÃO HISTÓRICA

A história da Matemática teve início , quando o homem começou a contar. O seu desenvolvimento se processou através dos tempos, acompanhando a evolução da sociedade e o crescente aumento das necessidades do homem. A ânsia de calcular os seus pertences, de medir a terra, perscrutar o céu e suas relações com o seu destino, a necessidade de comerciar, de navegar, levou-o a ampliar os seus conhecimentos matemáticos .

Com o rico material de que dispomos da civilização babilônica, observamos que ela possuía um sistema de numeração bastante desenvolvido; tábuas de multiplicação, de divisão, de quadrados e noções sôbre raízes quadradas .

Quanto à antiga cultura egípcia, conhecida hoje através de cinco papiros, dos quais o mais importante é o Rhind, escrito pelo escriba Ahmés, podemos afirmar que não conhecia os algarismos e possuía um sistema ilógico para a representação dos números.

O <u>um</u> se representava com uma vara de medir. O <u>dez</u> com um braço estendido ; o <u>cem</u> com uma folha de palma enrolada, o <u>mil</u> com uma flor de lotus e o <u>dez mil</u> com um dedo. O <u>milhão</u> era representado por uma rã, sem dúvida pela grande quantidade de dêstes batráquios, que abundavam no Egito, por ocasião das inundações do Nilo .

Na Grécia, a aritmética se desenvolveu .

Os pitagóricos, classificaram os números em pares e ímpares e designaram de números perfeitos aquêles como . 6 e 28 (6= 1+2+3)(28= 1+2+4+7+ + 14), que são iguais à soma de suas partes alíquotas. Estudaram ainda os números amigos, que são aquêles como : 220 e 284, cada um dos quais é a soma das partes alíquotas do outro .

Segundo Proclo, Euclides foi um sábio que floresceu no ano 300 A.C. e que publicou numerosas obras científicas, destacando-se entre elas, os célebres elementos, cuja importância científica e didática se evidencia ante o fato de que, até a bem poucos anos eram ainda utilizados como texto

escolar. Refere-se à Aritmética nos livros VII, IX e VIII.

Surge então Arquimedes, um dos mais brilhantes na história da Matemática, que no Livro dos Princípios, trata da numeração dos gregos .

Seguem-se outros como: Eratóstenes , Apolônio, Hipsecles, Nicómaco e Diofanto .

Eratóstenes, oriundo da Cirenaica (275 A.C.), foi ao mesmo tempo filólogo excelente, orador, poeta, arqueólogo, matemático e filósofo. Recebeu o título de Pentathlos, concedido ao campeão das cinco provas dos jogos olímpicos.

Concebeu um processo que atualmente é conhecido com o nome de Crivo de Eratóstenes , para determinação e construção das tabelas de números primos .

Nicómaco, de Gerasa, que viveu no fim do século I, ou princípios do II A.C., escreveu um trabalho intitulado : " Introdução Aritmética " que teve tanto êxito, que mais tarde foi traduzido para o latim por Boécio, sendo então usado como livro texto, para o ensimo da aritmética durante tôda a Idade Média .

Diofanto escreveu um trabalho sôbre os números poligonais e 13 livros sôbre a aritmética, dos quais os últimos sete estão perdidos .

Os árabes introduziram os algarismos indús, hoje conhecidos por arábicos, na Península Ibérica. Todavia, foi um monge francês, Gebert, quem difundiu o sistema de numeração escrita dos árabes, quando foi eleito Papa, sob o nome de Silvestre II, no ano 999.

No século III da era cristã, se inventou o zero - " pedra angular de tôda a aritmética de posição". Na Renascença destaca-se a " Arithemetica Integra " de Michel Stifel .

No século XVII aparece o primeiro trabalho moderno de Matemática recreativa, devido a : Claude Gaspar Bachet de Méziriac .

Fermat realizou, no campo dos números naturais, investigações que podemos considerar como as inaugurais da " teoria dos números " .

Nesta época, grandes matemáticos, como: Descartes, Marcenne, Wallis, Bromacher, Van Shoten , Euler , Lagrange e Legendre contribuiram com trabalhos valiosos para o desenvolvimento da aritmética.

Leonhard Euler (1707) , na teoria dos números, resolveu e generalizou numerosos problemas de Diofanto e de Fermat, assim como, abriu novos campos de investigações . Estudou os números perfeitos e os números amigos .

Em 1777 nasceu em Brunswick, na Alemanha, filho de pais pobres, o Príncipe da Matemática : Gauss .

Publicou um trabalho que marcou época : " Disquisitiones Arithmeticae " . Depois de Gauss, grandes matemáticos dedicaram-se à teoria dos números : Dirichlet, Kummer, Kronecker, Hermite, Cantor, Minkowski, L.Chebichev, Weirstrass, Dedeking , Peano, Hilbert e muitos outros.

Assim se desenvolveu a Matemática , bem como a Aritmética, como o resultado da soma das contribuições e dos sacrifícios dos filósofos e da massa anônima de várias gerações .

" A Matemática penetra todos os domínios da atividade humana; algumas vêzes parece invisível todavia, ela está sempre presente.

Para o homem civilizado de hoje, o " saber contar " não é menos importante que o saber " ler e escrever". A ciência dos números e da extensão agora é útil a todo instante para todos e, é uma verdadeira enfermidade, ignorar seus rudimentos ".

PAUL MONTEL

escolar. Refere-se à Aritmética nos livros VII, IX e VIII.

Surge então Arquimedes, um dos mais brilhantes na história da Matemática, que no Livro dos Princípios, trata da numeração dos gregos .

Seguem-se outros como: Eratóstenes , Apolônio, Hipsecles, Nicômaco e Diofanto .

Eratóstenes, oriundo da Cirenaica (275 A.C.), foi ao mesmo tempo filólogo excelente, orador, poeta, arqueólogo, matemático e filósofo. Recebeu o título de Pentathlos, concedido ao campeão das cinco provas dos jogos olímpicos.

Concebeu um processo que atualmente é conhecido com o nome de Crivo de Eratóstenes , para determinação e construção das tabelas de números primos .

Nicômaco, de Gerasa, que viveu no fim do século I, ou princípios do II A.C., escreveu um trabalho intitulado : " Introdução Aritmética " que teve tanto êxito, que mais tarde foi traduzido para o latim por Boécio, sendo então usado como livro texto, para o ensino da aritmética durante tôda a Idade Média .

Diofanto escreveu um trabalho sôbre os números poligonais e 13 livros sôbre a aritmética, dos quais os últimos sete estão perdidos .

Os árabes introduziram os algarismos indús, hoje conhecidos por arábicos, na Península Ibérica. Todavia, foi um monge francês, Gebert, quem difundiu o sistema de numeração escrita dos árabes, quando foi eleito Papa, sob o nome de Silvestre II, no ano 999.

No século III da era cristã, se inventou o <u>zero</u> - " pedra angular de tôda a aritmética de posição". Na Renascença destaca-se a " Arithemetica Integra " de Michel Stifel .

No século XVII aparece o primeiro trabalho moderno de Matemática recreativa, devido a Claude Gaspar Bachet de Méziriac .

Fermat realizou, no campo dos números naturais, investigações que podemos considerar como as inaugurais da " teoria dos números " .

Nesta época, grandes matemáticos, como: Descartes, Marcenne, Wallis, Bromacher, Van Shoten , Euler , Lagrange e Legendre contribuiram com trabalhos valiosos para o desenvolvimento da aritmética.

Leonhard Euler (1707) , na teoria dos números, resolveu e generalizou numerosos problemas de Diofanto e de Fermat, assim como, abriu novos campos de investigações . Estudou os números perfeitos e os números amigos .

Em 1777 nasceu em Brunswick, na Alemanha, filho de pais pobres, o Príncipe da Matemática : Gauss .

Publicou um trabalho que marcou época : " Disquisitiones Arithmeticae " . Depois de Gauss, grandes matemáticos dedicaram-se à teoria dos números : Dirichlet, Kummer, Kronecker, Hermite, Cantor, Minkowski, L.Chebichev, Weirstrass, Dedeking , Peano, Hilbert e muitos outros.

Assim se desenvolveu a Matemática , bem como a Aritmética, como o resultado da soma das contribuições e dos sacrifícios dos filósofos e da massa anônima de várias gerações .

" A Matemática penetra todos os domínios da atividade humana; algumas vêzes parece invisível todavia, ela está sempre presente.

Para o homem civilizado de hoje, o " saber contar " não é menos importante que o saber " ler e escrever". A ciência dos números e da extensão agora é útil a todo instante para todos e, é uma verdadeira enfermidade, ignorar seus rudimentos ".

PAUL MONTEL

SUGESTÕES PARA O ESTUDO METÓDICO DA MATEMÁTICA

I - QUANDO ESTIVER EM CASA

1- Adquira a confiança de que pode aprender Matemática com facilidade. Não se deixe impressionar por pessoas pessimistas, sem fôrça de vontade. Geralmente, as pessoas não gostam de Matemática, em virtude de encontrarem dificuldades para resolver problemas. As razões são as seguintes :

a) - Leitura defeituosa. Leia com atenção e reflita no que lê. A leitura superficial em Matemática, é em geral, perda de tempo. Você está acostumado a fazer leituras sôbre assuntos descritivos, nos quais as palavras não têm o grau de precisão dos têrmos matemáticos e as idéias não estão reduzidas em poucas palavras, como é o caso do enunciado de um problema ou de uma propriedade. Porisso, você adquire o hábito de ler sob uma forma displicente, de ficar satisfeito em obter uma impressão vaga e geral do que lê. Você necessita ler sob uma forma dinâmica, com atenção e cuidadosamente, para ser possível visualizar e compreender. Procure evitar a inércia, quando estiver lendo uma lição de Matemática .

b) - Falta de domínio operatório. Talvez a pessoa não compreenda bem as operações aritméticas e também apresente insegurança no cálculo.

c) - Falta de conhecimento da parte teórica .

d) - Vocabulário pobre .

e) - Visão defeituosa .

f) - Falta de atenção -

g) - Por procurar resolver problemas que não estão de acôrdo, com o nível de conhecimentos e experiências .

h) - Falta de iniciativa, para estabelecer relações .

2- Planeje seu trabalho, antes de seu horário de estudos iniciar-se .

3- Os seguintes hábitos são importantes :

a) - Estudar num determinado horário.

b) - Iniciar seus trabalhos de uma vez , sem demora ou moleza .

c) - Concentrar no estudo tôda a sua atenção .

d) - Evitar interrupções, quando estiver estudando .

4- Trabalhe com cuidado. É mais difícil descobrir êrros, do que evitá-los .

5- É necessário que você compreenda o significado de tôdas as palavras e expressões de sua lição. Aprenda a usar o dicionário .

6- Estude muito, antes de assistir uma aula, pois, o desenvolvimento da habilidade de aprender nos livros, é um dos mais importantes fatôres de progresso.

7- Procure atuar o seu pensamento sôbre o assunto que estiver estudando, sob uma forma dinâmica.

8- Não se esqueça que, para aprender, é necessário Estudar !!!

II - QUANDO ESTIVER ASSISTINDO UMA AULA

1- Preste a máxima atenção, quando o professor estiver explicando.(Evite assistir a aula, sob uma forma passiva) .

2- Pergunte ao professor, tôda vez que não compreender alguma coisa. Adquira o hábito de fazer perguntas .

3- Procure visualizar tudo o que fôr dito pelo professor .

4- Não perca tempo durante a aula, anotando coisas que podem ser encontradas no livro-texto.

5- Quando estiver estudando em casa e ocorrer alguma dúvida ou dificuldade, anote no seu caderno, para perguntar ao professor .

6- Procure chegar um pouco antes da hora da aula, para trocar idéias com seus colegas .

7- Caso algum de seus colegas não esteja cumprindo com as obrigações, procure aconselhá-lo . Lembre-lhe a importância de saber Matemática na vida moderna e que, a sua displicência pode prejudicar o progresso da turma .

8- NÃO SE ESQUEÇA !!! PERGUNTE TÔDA VEZ QUE NÃO COMPREENDER. NÃO FIQUE COM DÚVIDAS ! QUALQUER DÚVIDA É UM OBSTÁCULO PARA O SEU PROGRESSO !!!

SIMBOLIZAÇÃO, ABREVIATURAS E INTERPRETAÇÃO DE ALGUNS TÊRMOS E EXPRESSÕES USADOS EM LINGUAGEM MATEMÁTICA .

1 - SINAIS

a) Operação

+ (mais) Adição
- (menos) Subtração
. (vezes) Multiplicação

NOTA : Harriot em 1631, usava um ponto para indicar o produto

x (multiplicado por) Multiplicação

NOTA: O matemático inglês Guilherme Oughtred empregou, pela primeira vez, o sinal x (multiplicado por) no livro: "Clavis Mathematicae ", publicado em 1631 .

: ou ÷ (dividido por) Divisão

$\sqrt{\ }$ (radical) Radiciação

NOTA: Foi usado por Rudolf em 1526.

b) Relação

= (igual a)

NOTA: Roberto Record, matemático inglês, será sempre apontado na história da Matemática, por ter sido o primeiro a empregar o sinal = , para indicar a igualdade .

≠ (não é igual a) (diferente de)
Ex: a não é igual a b ($a \neq b$)

((contido em)

∈ (pertence a)
∉ (não pertence a)
> (maior que)
< (menor que)

NOTA: A quantidade que fica no <u>vértice</u> é a menor. A que fica na <u>abertura</u> é a maior

Ex: $5<7<8$ lê-se : sete é menor do que oito e maior do que cinco.

≥ (maior ou igual a)
≤ (menor ou igual a)
≯ (não é maior que)
≮ (não é menor que)
≅ (aproximadamente igual)
≡ (idêntico a)
: ou - (está para)
:: ou = (assim como)
≷ (maior ou menor que)

c) <u>Grupamento</u>

(Parêntesis)
[Colchetes]
{ Chaves }
| Barras |

d) <u>Auxiliares</u>

∴ (donde, portanto)
↗ (cresce) ↘ (decresce)
Â (ângulo A) △ (triângulo)
⊥ (perpendiculares) // (paralelas)
% (por cento) ° (grau)
, (minuto) ,, (segundo)

II - <u>ABREVIATURAS</u>

nº	(número)	A.C	(antes de Cristo)
Ex:	(exemplo)	D.C.	(depois de Cristo)
C.Q.D.	(como queríamos demonstrar)	k	(quilo - mil)
a.a.	(ao ano)	h	(hecto - cem)
M.D.C.	(máximo divisor comum)	M.M.C.	(mínimo múltiplo comum)
da	(deca - dez)	d	(deci - um décimo)
c	(centi- um centésimo)	m	(mili - um milésimo)
m	(metro)	l	(litro)
st	(estéreo)	g	(grama)
gr	(grado)	rd	(radiano)
a	(are)	S	(superfície)
V	(volume)	t	(tonelada)
r	(reto-ângulo)	s	(segundo)
min ou m	(minuto)	h	(hora)
d ou da	(dia)	£	(libra)
sh	(shiling)	d	(penny)
in	(inch-polegada)	yd	(yard- jarda)
I	(inversamente)	D	(diretamente)

III - <u>TÊRMOS</u>

<u>A</u>

Ábaco : designação de aparelhos utilizados pelos calculistas, para efetuar as operações fundamentais .

Abstração : O processo intelectual mediante o qual separamos mentalmente as qualidades particulares de vários objetos, para fixarmos exclusivamente em um ou em vários atributos comuns a todos êles, recebe o nome de <u>abstração</u>. O conceito que é o resultado de uma abstração, recebe o nome de conceito abstrato. Os conceitos de volume, superfície e comprimento, massa e pluralidade de coisas, são conceitos abstratos, pois são o resultado de abstrações. Outro importantíssimo conceito abstrato, é o de número natural.

Abstrato : O que designa uma qualidade separada do objeto a que pertence.

Agrário : Relativo aos campos e à agricultura. Há as medidas agrárias, que são utilizadas para avaliar a área dos terrenos. Há três unidades : hectare, are e o centiare.

Algoritmo : Processo formal de cálculo. Ex : Algoritmo de Euclides. Processo usado para a determinação do M.D.C. de dois números.

Alterar : Modificar.

Ano : Civil (365 dias) Comercial (360 d.)

Antepôr : E' pôr antes de ...

Arbitrário : À vontade, sem obedecer a regra.

Axioma : São verdades evidentes por si mesmas. Exs :
Tôda coisa é igual a si mesma. O todo é igual à soma de suas partes. O todo é maior que as partes. A parte é menor que o todo. Duas coisas iguais a uma terceira, são iguais entre si.

C

Consecutivo : que segue outro, imediato. Ex: dois números inteiros e consecutivos diferem de uma unidade (8 e 9)

Conter : Ter dentro, encerrar em si, compreender.

Conteúdo : Aquilo que se contém em alguma coisa.

Contíguo : Que está em contacto, junto, próximo.

Continente : Que contém alguma coisa ; aquilo que contém alguma coisa.

D

Demonstração : É o raciocínio apoiado em axiomas, teoremas e postulados básicos, por meio do qual, a mente adquire o convencimento de que a tese é verdadeira.

E

Equivalente : De igual valor.

Escólio : E'uma advertência ou observação, sôbre alguma questão matemática.

Excesso : Diferença para mais, entre duas quantidades. Ex :
$A - B = C \quad A = B + C \quad A - C = B$

H

Hipótese : E'o que se admite como verdade.

I

Intercalar
Interpolar
Inserir : E' pôr entre.

L

Lema : E' o teorema que deve preceder a outro, por ser necessário para sua demonstração.

M

Meio : Metade.

P

Pospôr : E' pôr depois de ...

Postulados : São verdades que não se demonstram, que não são evidentes por si mesmas, mas, se admitem como certas em face da experiência. É famoso, em Geometria, o Postulado do matemático Euclides:
" Por um ponto dado fora de uma reta, só se pode traçar uma paralela a essa reta e sòmente uma ".

Problema : É uma questão na qual há que se determinar quantidades desconhecidas chamadas <u>incógnitas</u>, por meio de suas relações com quantidades conhecidas e chamadas <u>dados</u> do problema.

R

Recíproco : De um teorema é outro teorema, cuja hipótese é a tese do primeiro, chamado:(teorema direito)e cuja tese é a hipótese do direito.

S

Semi : Metade. <u>Semi-soma</u>: metade da soma. <u>Semi-perímetro</u>: metade do perímetro.

T

Teorema : É uma verdade que necessita de demonstração. Ex:
Todo número que divide as parcelas de uma soma, divide também a soma.

Tese : É o que se pretende demonstrar.

IV- EXPRESSÕES

<u>Ano bissexto</u> : é o ano que tem 366 dias, sendo o mes de fevereiro com 29 dias. Todo ano bissexto é múltiplo de 4, isto é, é divisivel por 4. É devido ao fato de se repetir de 4 em 4 anos.

"<u>De 7 a 80 incluidos</u>" - significa que o número menor (7) e o maior (80) serão considerados, isto é serão contados.

"<u>De 7 a 80 inclusos</u>" - significa o mesmo que anteriormente, pois, as expressões <u>incluidos</u> e <u>inclusos</u> têm a mesma significação.

"<u>De 7 a 80 excluidos</u>" (ou <u>exclusos</u>)- quer dizer que, os dois números citados, não serão contados, passando o menor a ser (8) e o maior (79), isto é, "de 8 a 79 incluidos".

"<u>De 7 a 80 ,sem nenhum esclarecimento</u>"- significa o mesmo que : " de 7 a 80 incluidos, isto é, o (7) e o (80) serão contados.

"<u>Entre 7 e 80</u>" é o mesmo que " de 7 a 80 excluídos.

"<u>Depois de ... e antes de ...</u>" pode ser traduzido por <u>entre</u>.

"<u>Escrever até 80</u>" - significa que se deve escrever de <u>1</u> até <u>80</u>.

"<u>De 7 inclusive a 80 excluído</u>" - quer dizer que o <u>7</u> será contado e o <u>80</u> não. Então ficaria : 7 a 79 incluídos.

"<u>De 7 excluso a 80 incluso</u>"- significa que o (7) não será contado e o (80) será contado. Esta ficará de : 8 a 80 incluídos.

"<u>Número de páginas</u>"- é o dôbro do número de fôlhas Cada fôlha tem duas páginas.

"<u>Números inteiros e consecutivos</u>" - são os números inteiros, que diferem entre si de uma unidade.
Quer dizer : a) O menor é igual ao maior, menos <u>um</u>.
b) O maior menos o menor, é igual a <u>um</u>
c) O menor mais <u>um</u>, é igual ao maior.

Ex : 8 e 9 a) $8 = 9-1$ b) $9-8 = 1$ c) $8 + 1 = 9$

"Números pares e consecutivos" - são os números pares (terminados em 0, 2, 4, 6, 8) que diferem entre si de duas unidades .

Ex: 10 e 12 Temos :

10 = 12-2 (a)
12-10 = 2 (b)
10+ 2 = 12 (c)

"Números ímpares e consecutivos" - são os números ímpares (terminados em: 1, 3, 5, 7, 9), que diferem entre si de duas unidades .

Ex: 13 e 15 Temos :

a) 13 = 15-2
b) 15 - 13=2
c) 13 + 2 =15

"Um número é o sextuplo de outro " = " O quocien te de dois números é 7" = "O maior é o sétuplo do menor " = " O maior contém 7 vêzes o menor " = "O maior vale 7 vêzes o menor " = " O menor é a sétima parte do maior " = " A soma dos dois números vale oito vêzes o menor " = "A soma de dois números é o óctuplo do menor " = "A diferença entre o maior e o menor, vale seis vêzes o menor " = " A diferença entre dois números é o sextuplo do menor ".

Ex: Consideremos : 21 e 3
Temos :
21 = 7 x 3 21 : 3 = 7
21 : 7 = 3 21 + 3 = 8 x 3
21 - 3 = 6 x 3

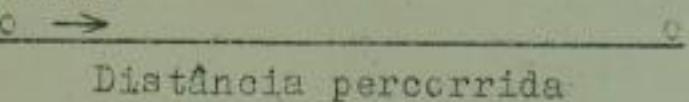
"Estudar as variações de ..." - consiste em observar as modificações de uma grandeza, com as variações de outra ou outras grandezas, com as quais está relacionada .

Ex: a) Estudar as variações da soma, com as variações das parcelas .
b) Estudar as variações do resto com as variações do minuendo e subtraendo .
c) Estudar as variações do produto com as variações dos fatôres .
d) Estudar as variações do quociente com as variações do dividendo e do divisor .
e) Estudar as variações do volume de um paralelepípedo, com as variações das dimensões.
f) Estudar as variações do tempo necessário, para percorrer um espaço bem determinado, com as variações de velocidade .

"Qual a variação ?" = " Que mudança sofre?" = "Que mudança experimenta ?"

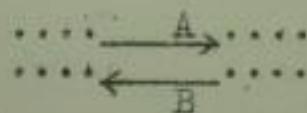
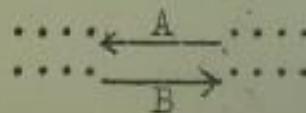
"A diferença das idades " - A diferença das idades de duas pessoas, é sempre constante, isto é, não varia.

Ex: Um pai tem 30 anos e o filho 7 anos. A diferença das idades será sempre de 30 anos - 7 anos= = 23 anos .

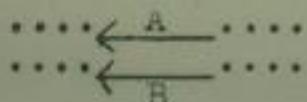
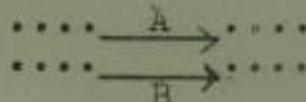
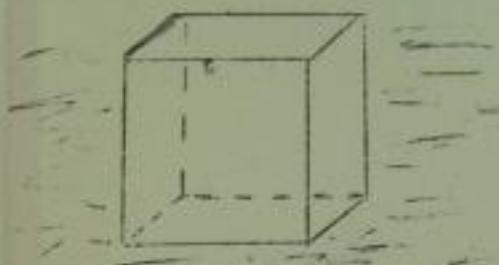
"Qual a distância percorrida " - é o espaço compreendido entre o ponto de partida e o ponto de chegada .

Ex: Partida o → ____ o Chegada
Distância percorrida

"A distância que os separa " - espaço compreendido entre os móveis .

Ex: automóvel A→ ____ →B Bicicleta
80 km = distância que os separa

"Caminhar na mesma direção " - Consideremos duas estradas paralelas :

....←A.... ....A→....
....B→.... ....←B....
Mesma direção Mesma direção

"Caminhar no mesmo sentido "

....A→.... ....←A....
....B→.... ....←B....

1- ABSTRAÇÃO. CONCEITOS ABSTRATOS. GRANDESAS . QUANTIDADES .

O volume de um corpo é dado, pelo lugar que ocupa no espaço, num determinado momento .

Observando os corpos que se apresentam na natureza, e separando mentalmente suas qualidades, com excessão das que se referem a seus volumes, para nos fixar exclusivamente nêste atributo comum a todos êles, podemos chegar ao conceito de volume .

O conceito de volume é geral, isto é, não se refere a nenhum corpo determinado, senão ao atributo comum, que têm todos os corpos de ocupar um lugar no espaço .

Êste processo intelectual mediante o qual, separamos mentalmente as qualidades particulares de vários objetos, para nos fixar exclusivamente em um ou vários atributos comuns a todos êles, recebe o nome de abstração .

Exemplos :

a) Consideremos dois conjuntos, um de pontos, outro de traços .

Observando-os podemos constatar que êles possuem o mesmo número de elementos . Realizamos uma abstração .

b) Observando as fôlhas dêste livro, podemos constatar que, elas possuem o mesmo comprimento ou a mesma superfície. Realizamos uma abstração .

Os conceitos abstratos de volume, superfície, comprimento e pluralidade, receberam o nome de grandezas .

Quantidades : são estados bem determina-

dos das grandezas .

Por observação das quantidades, o homem chegou através da abstração, ao conceito de grandeza. Exemplos de quantidades :

O volume de sua mão, o comprimento de seu braço, o volume dêste livro, a superfície de uma maçã, a área desta página, o comprimento de um ônibus, etc .

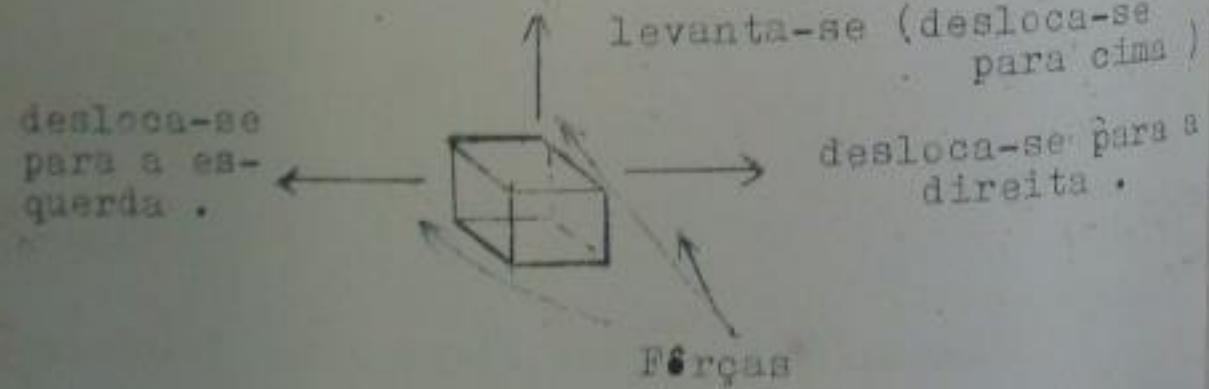
Grandezas quanto a natureza
- a) Contínuas
- b) Discretas
- c) Escalares
- d) Vetoriais

Grandezas contínuas : são aquelas que dão idéia de totalidade, sem partes nem elementos identificáveis.
Exs: o comprimento, o volume, a superfície, etc.

Grandezas discretas : são as pluralidades de coisas.
Exs: as pluralidades de pedras, de laranjas, de meninos, de cadernos, de livros, de mesas, de pontos, de pedaços de giz, etc.

Grandezas escalares : são as que não possuem direção.
Exs: o comprimento, a área, o volume, o tempo, a massa.

Grandezas vetoriais : são as que exigem a consideração de uma direção e sentido .
Exs: a fôrça e a velocidade

levanta-se (desloca-se para cima)
desloca-se para a esquerda .
desloca-se para a direita .
Fôrças

Quantidades quanto a natureza
- a) contínuas
- b) discretas
- c) escalares
- d) vetoriais
- e) homogêneas
- f) heterogêneas

Quantidades contínuas : são os estados particulares de grandezas contínuas .
Exs: o volume de uma laranja, o comprimento desta página, a temperatura de seu corpo , etc.

Quantidades discretas : são os estados particulares das grandezas discretas .
Exs: os alunos de um colégio, as fôlhas dêste livro.

Quantidades escalares : são os estados particulares das grandezas escalares .
Exs : o comprimento de uma caneta, a área de seu quarto, o volume de uma maçã, etc.

Quantidades vetoriais : são os estados particulares das grandezas vetoriais .
Exs : a velocidade de um ônibus, a velocidade de um cavalo, a velocidade de um avião , etc.

Quantidades homogêneas : são os estados diferentes de uma mesma grandeza .
Exs: o volume de uma pedra
o volume dêste livro
o volume de um apagador
o volume de um relógio , etc .

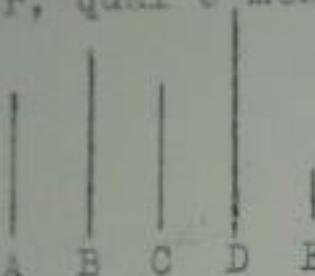
Quantidades heterogêneas : são estados de grandezas diferentes .
Exs : comprimento de um lápis
área desta página
volume de uma caneta

NOTA : Quando consideramos as quantidades, isto é, os estados particulares das grandezas, podemos:

a) Estabelecer comparações e determinar a igualdade e a desigualdade entre êsses esta

dos . Exs:

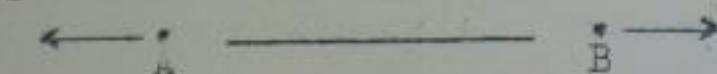
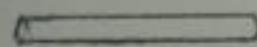
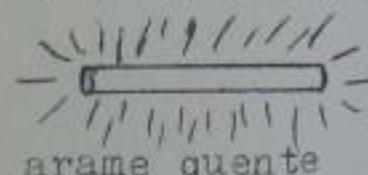
Consideremos vários pedaços de arame .
Podemos estabelecer por simples comparação, qual o maior, qual o menor e quais os iguais.

A B C D E

Menor : pedaço E

Maior : pedaço D

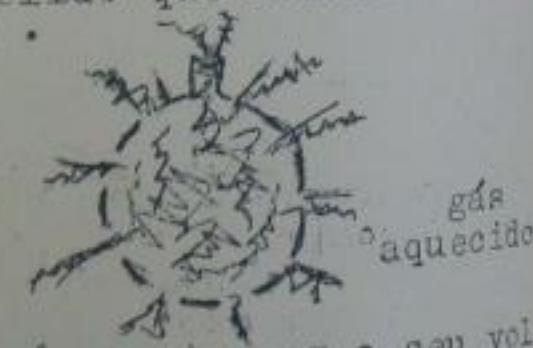
Iguais: pedaços A e C .

b) Estudar e determinar as variações que pode sofrer um mesmo estado, em virtude de de fenômenos naturais .
Exs :

A B

A distância entre dois móveis pode aumentar ou diminuir .

arame frio arame quente

O volume de um sólido que aumenta ou diminue , com a ação do calor .

gás gás aquecido

A pressão de um gás varia com o seu volume .

2- A MATEMÁTICA E OS SEUS FUNDAMENTOS

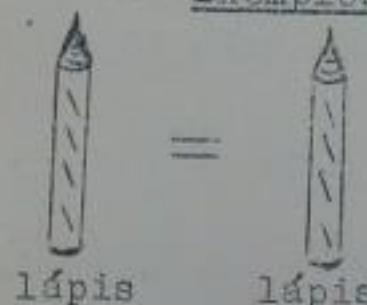
A Matemática, como tôdas as ciências , tem seus fundamentos básicos, seus alicerces e sôbre êles constroe -se seu edifício .

Necessitamos partir de conceitos primitivos , admitidos sem definição. São conhecimentos puramente intuitivos, isto é. conhecimentos que obtemos por intuição, por contácto direto com os objetos, sem que sejam necessários conhecimentos anteriores .

Exs: grandeza, espaço, matéria, unidade, pluralidade, conjunto, ponto, plano, ordenação, correspondência, etc .

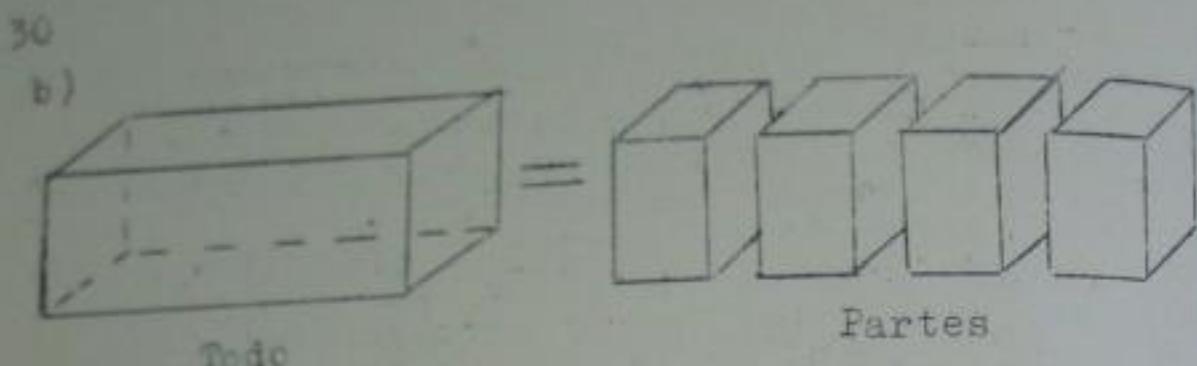
A Matemática fundamenta-se ainda em certos princípios muito simples, adquiridos pela experiência e através dos sentidos, cuja certeza absoluta é admitida por nossa razão, por ser uns (axiomas) e identes por si mesmos e estar outros(postulados) de completo acôrdo com a experiência .

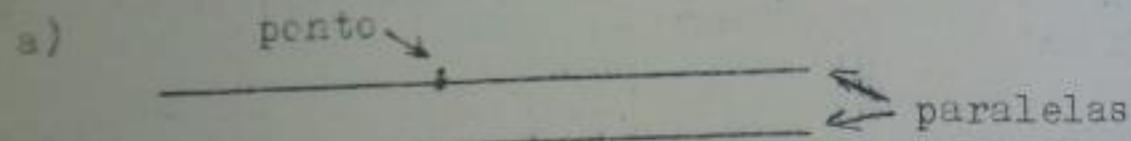
Exemplos de axiomas :

a) lápis = lápis

Todo objeto é igual a si mesmo .

NOTA : Objeto, sob o ponto de vista matemático, não implica na obrigatoriedade de ser uma coisa material.

E' objeto: um livro, uma mesa, mas, também é objeto : o espaço, o plano, o ponto geométrico, um sólido geométrico, uma figura plana, uma expressão simbólica , etc .

b)

- O todo é igual a soma das suas partes.
- O todo é maior que cada uma das partes .
- Qualquer parte é menor que o todo.

Exemplos de postulados :

a) ponto — paralelas

" Por um ponto dado fora de uma reta, só s[e] pode traçar uma paralela a essa reta e s[o]mente uma " .

b) " A todo conjunto pode-se tirar ou acrescen-tar um elemento " .

Sôbre êstes alicerces : conceitos pri-mitivos, axiomas e postulados se constroe a ciên-cia Matemática .

Aparecem como consequência , as defini-ções e os teoremas .

Definição : Ex : Triângulo é o polígono d[e] três lados .

A
B C

Teorema : Ex : Dois triângulos que têm os três lados respectivamente iguais, são iguais .

3- CONCEITO DE NÚMERO NATURAL

A observação de um só ser ou objeto,con siderado isoladamente, como uma garrafa, um navio , um homem, uma mesa, um pássaro, um relógio, etc,nos fornece a idéia de unidade . Portanto, cada coisa ou ser, dá a idéia de unidade .

Estes exemplos considerados de unida - des diferentes têm no entanto, algo abstrato em co mum : uma só coisa de sua espécie.

A palavra um se aplica a qualquer dês ses sêres tão diversos, prescindindo de suas quali- dades especiais .

Esta operação de não considerar as qua lidades particulares,para nos fixarmos num atributo

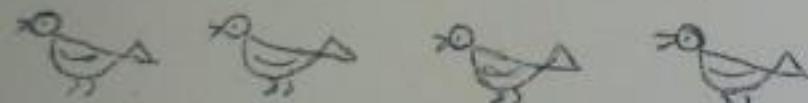
comum, chama-se abstração .

A observação de várias coisas ou sêres sugerem a idéia de pluralidade e, se as considerar- mos "juntas", obteremos a noção de conjunto, reunião, classe, agregado ou coleção.

Por exemplo, prezado leitor, você é u aluno. Com seus colegas, formam um conjunto de al nos . O seu livro de Matemática, junto aos outro livros que você possue, constituem a sua bibliotec

Os entes que formam um conjunto pode ser materiais ou não. Assim, os pássaros de um v veiro, os alunos de uma turma, os estados do Brasi são conjuntos formados por entes materiais ; enqua to que, os pontos de uma reta, as retas de um plan os vértices de um polígono, são conjuntos formados por entes imateriais .

Cada um dos sêres ou objetos de um con- junto é um elemento do conjunto .

Consideremos o seguinte conjunto de pá saros :

Este conjunto pode aumentar ou diminuir de um elemento (pássaro).

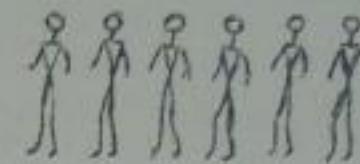
Hipótese A : Aumentou de um pássaro .

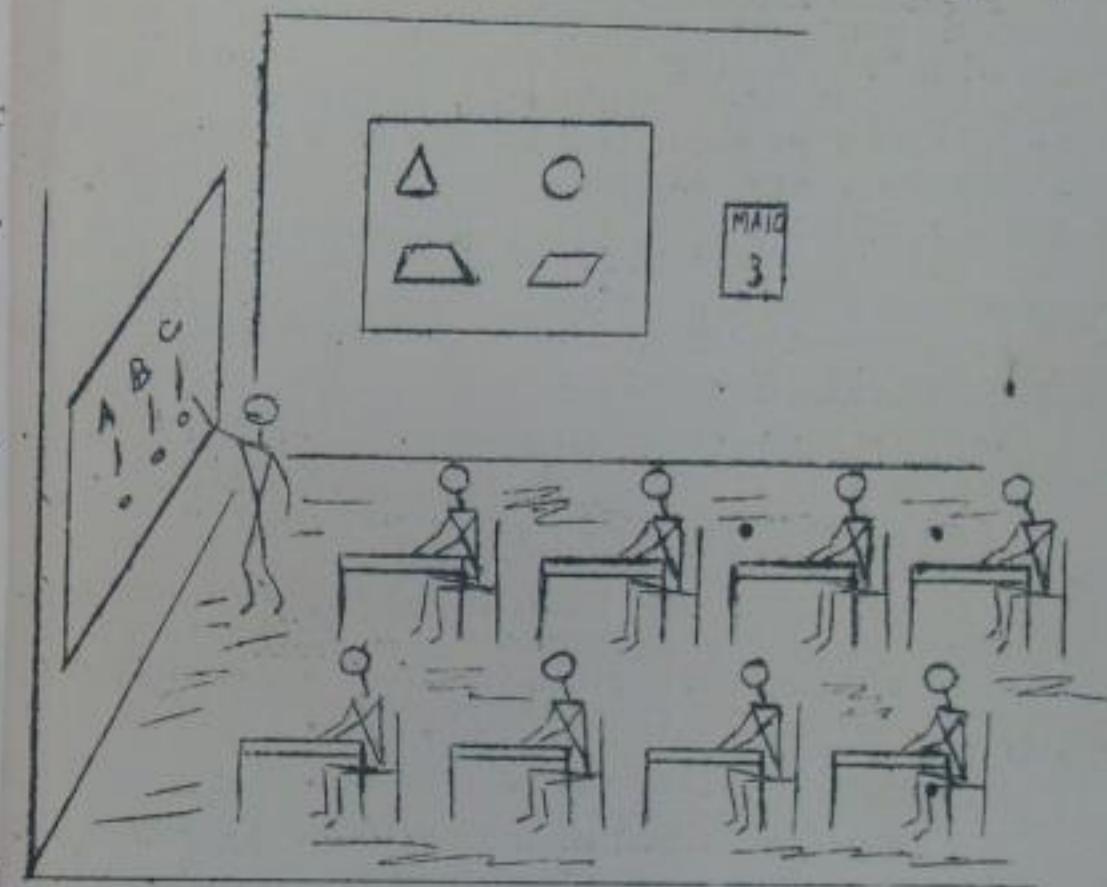
Hipótese B : Diminuiu de um pássaro .

Podemos concluir :

- A todo conjunto pode-se acrescentar ou tirar um elemento .

Diremos que um conjunto é homogêneo , quando todos os seus elementos são da mesma espéci

Ex: Um conjunto de homens .

Diremos que um conjunto é heterogêneo, quando os seus elementos são de naturezas diferentes

Ex : Um conjunto de homens, de pássaros e de garrafas .

Observemos esta sala de aula . O profes-
sor está contente, pois não faltaram alunos. Ele s
be fàcilmente, que não faltam alunos, com uma si
ples observação : Tôdas as cadeiras estão ocupadas
A cada cadeira corresponde um aluno e
cada aluno corresponde uma cadeira .

Qualquer que seja a ordem de entrada n
classe (dos alunos) e a ordem de escolha das cade
ras, ainda a cada aluno corresponde uma cadeira e
cada cadeira um aluno.

Qualquer aluno pode sentar-se em qua
quer cadeira. Temos portanto, dois conjuntos : u
de alunos e um de cadeiras.

A êste tipo de correspondência, chamam
: correspondência biunívoca ou coordenação .

Quando é possível estabelecer uma corre
pondência biunívoca entre os elementos de dois co
juntos, diremos que êles são coordenáveis .

Portanto :

Dois conjuntos são coordenáveis , quando
entre seus elementos pode estabelecer-se uma corre
pondência biunívoca ou perfeita, de modo que , a c
da elemento do primeiro conjunto, corresponda um
um só elemento do segundo conjunto, e a cada el
mento do segundo, corresponda um e um só elemento
do primeiro conjunto .

Quando entre dois conjuntos não se pode
estabelecer uma correspondência biunívoca, porque
sobram elementos de um dos conjuntos, os conjunt
não são coordenáveis .

—Vamos observar agora, esta sala de aula
que corresponde ao desenho da página seguinte .

Podemos constatar que o professor está
triste, pois estão faltando alunos .

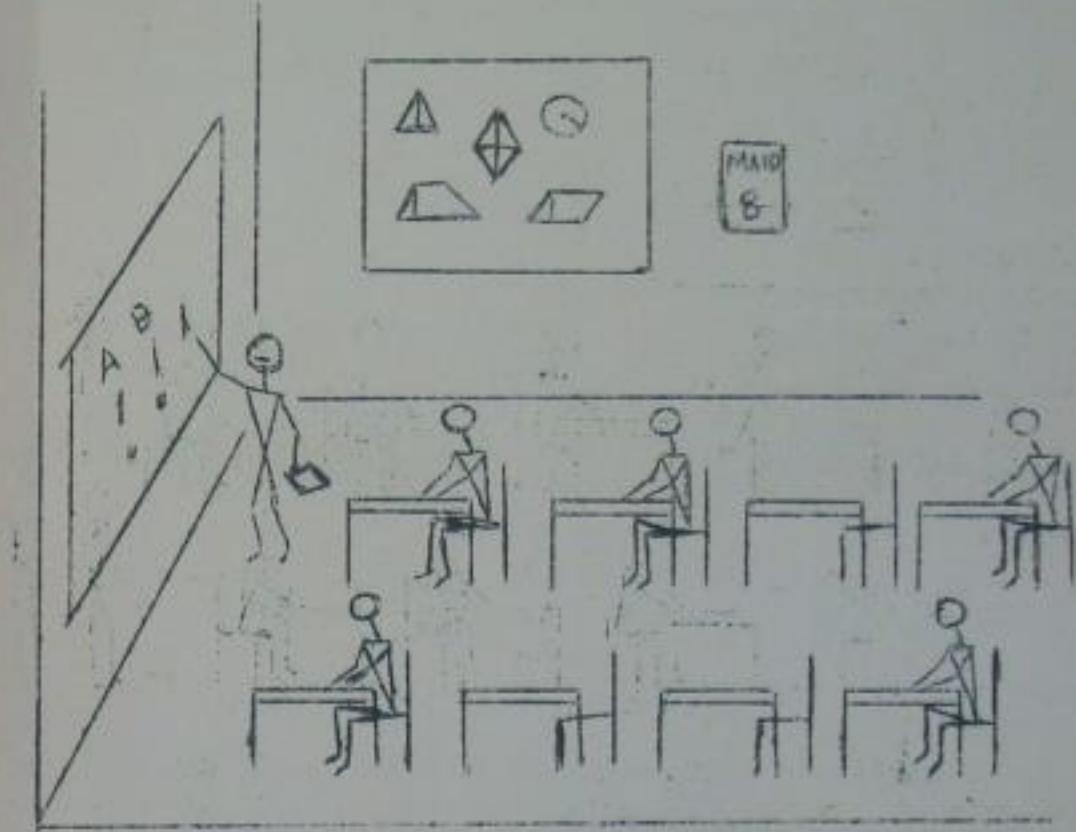
O conjunto de alunos agora, é coordená
vel com o conjunto de cadeiras ? - NÃO.

O conjunto de alunos só é coordenável
com uma parte do conjunto de cadeiras .

Sobram cadeiras sem alunos .

Mesmo que os alunos mudassem de cadeir
ainda sobraria o mesmo conjunto de cadeiras.

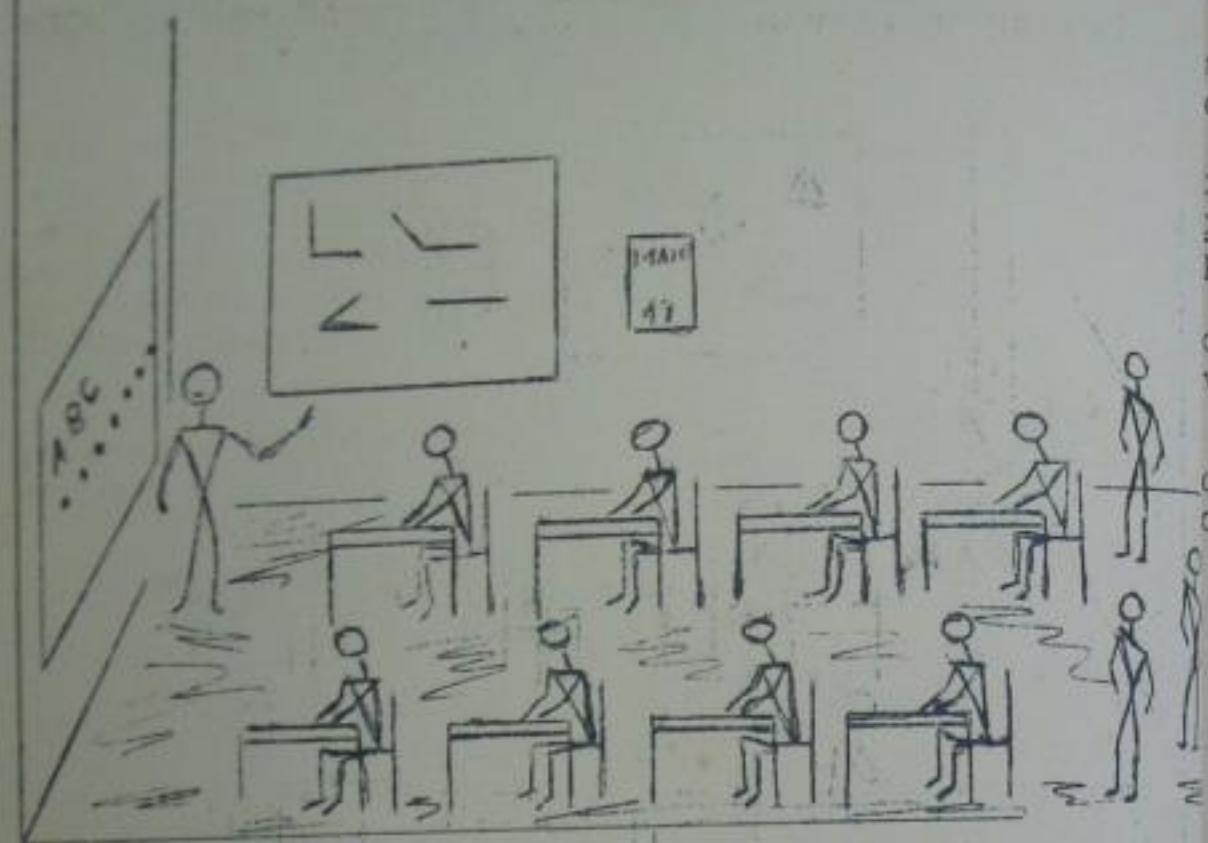
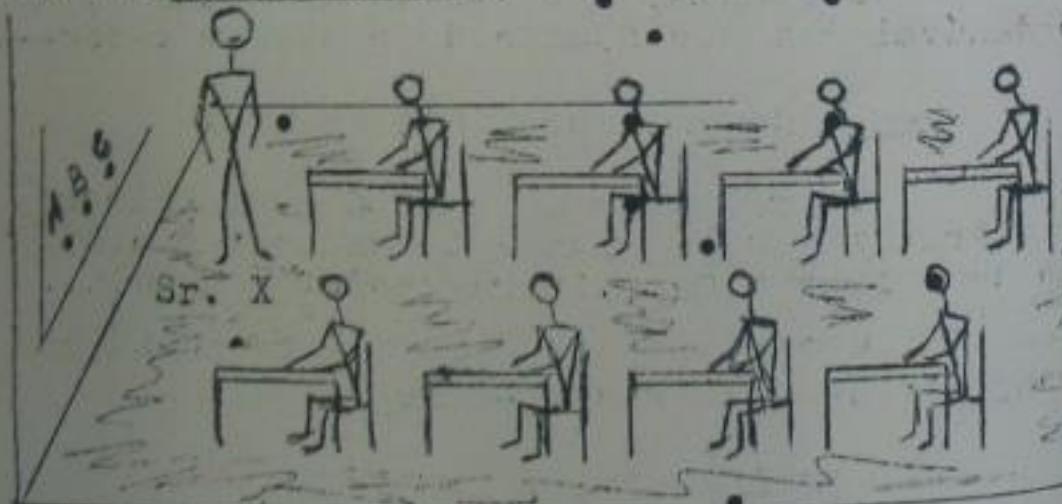
Vejamos a sala de aula , que corresponde à explicação anterior. Observem !

Não estão faltando alunos ?- SIM , por-que algumas cadeiras estão desocupadas .

Portanto, o conjunto de alunos , não é coordenável com o conjunto de cadeiras e vice-versa

No desenho seguinte temos :

O professor hoje está muito alegre, por-que vieram todos os alunos da classe e ainda al-guns de outras turmas, para assistir a aula .

O conjunto de alunos é coordenável com o conjunto de cadeiras ? - NÃO .

Vejamos a sala de aula .

Podemos dizer, que o conjunto de alunos é coordenável com uma parte do conjunto de cadeiras . Com essa simples correspondência, entre co[illegible]ções constituidas de elementos de naturezas tão d[illegible]versas, como cadeiras e alunos, surge o conceito abstrato de número natural .

O professor observando esta turma, pode constatar os seguintes conjuntos : de alunos , de cadeiras e de mesas .

Estes conjuntos são coordenáveis, porque a cada mesa corresponde uma cadeira e um aluno, e cada aluno uma cadeira e uma mesa .

A coordenação dos conjuntos considerados faz surgir em nossa mente, a idéia de número natural. Êsse atributo comum é independente das propriedades particulares dos elementos dos conjuntos.

Podemos dizer, que o número natural indica a pluralidade comum a vários conjuntos coordenáveis entre si . Ou então :

Número natural : é um conceito abstrato, que representa certa propriedade comum a todos os conjuntos coordenáveis entre sí .

Prof. X Prof. Y

Os professôres X e Y encontraram-se .

Sr. Y - Como vai ? Há muitos alunos na sua classe ?

O prof. X , para fazer com que o prof, Y pudesse visualizar a pluralidade de alunos da sua sala, utilizou alguns palitos de fósforo .

Sr. X - Observe para êste conjunto de

palitos e corresponda a cada um dêles um garoto
você saberá o número de alunos da minha classe .

Prof.Y : Mas, isto é um processo bastante primiti
Eu sei que já foi bastante usado.
Os incas do Perú , por exemplo, serviam-s
de uma corda com nós, para avaliar o núme
ro de feixes produzidos durante o dia .
Muitas tribos marcavam com cortes numa ár
re, os animais abatidos . .
A cada animal abatido, correspondia u
corte e a cada corte um animal abatido .
Os pastôres também usavam pedrinhas, par
saber se faltavam ou não carneiros ! A c
da pedra correspondia um carneiro e a ca
carneiro correspondia uma pedra.

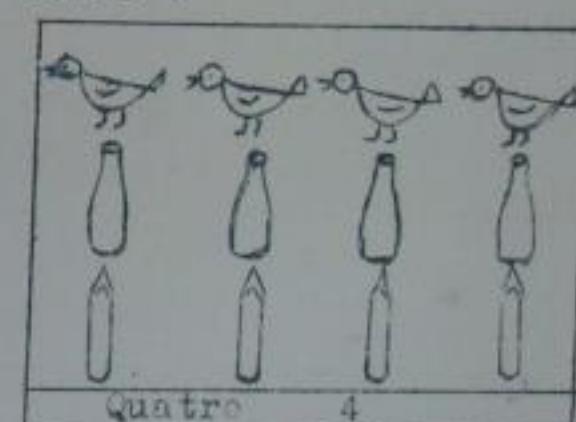
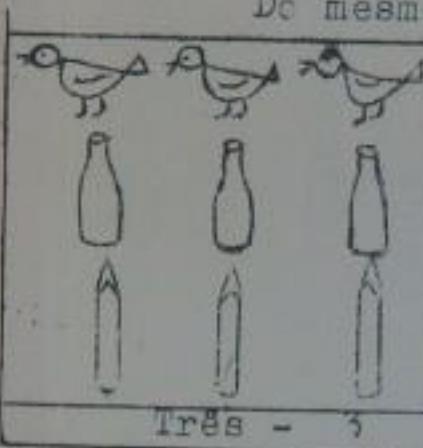
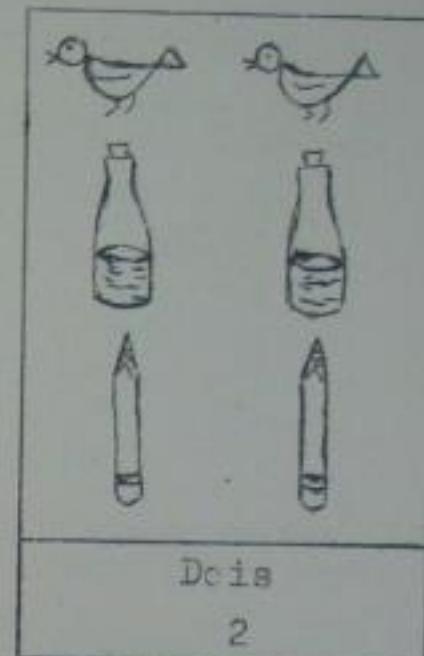
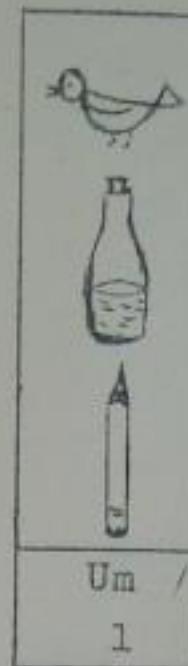
Prof. X: Justamente !!! O homem sentiu então a ne
cessidade de representar os números natu
rais, através de símbolos, o que iria fa
litar as comunicações entre as pessoas .
Bastaria mostrar o símbolo ou pronunciar
ma palavra, para a outra pessoa sentir
número natural considerado .

Obrigado, com licença. Vou continuar mi
nha aula .

Da conversa entre os professôres, pode
mos observar a necessidade de considerarmos cole
ções ideais, constituidas por elementos, numa dete
minada ordem, os quais, postos em correspondência
com os elementos de qualquer conjunto, nos indic
rão o número natural comum a todos êles .

Estas coleções ideais, serão constitui
das por sinais e palavras. Esta escôlha é justific
vel, pois só haverá um esfôrço inicial, para memor
zar os elementos convencionados .

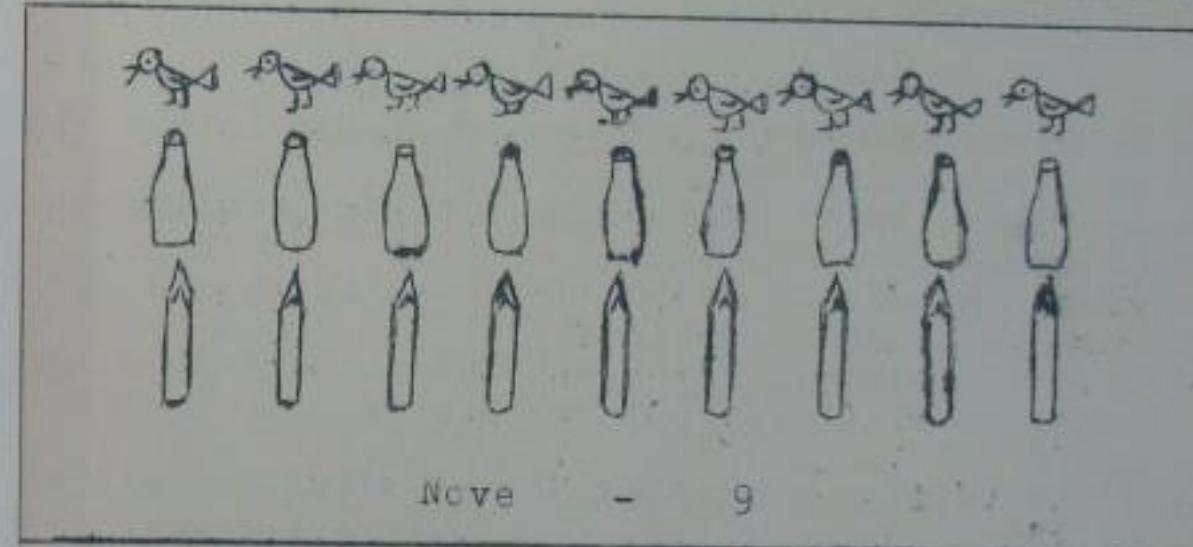
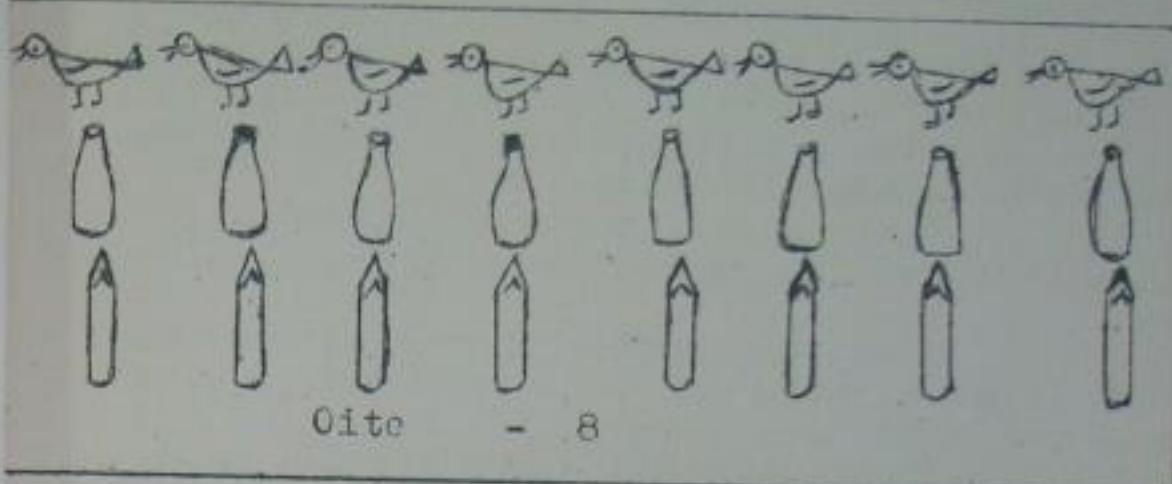
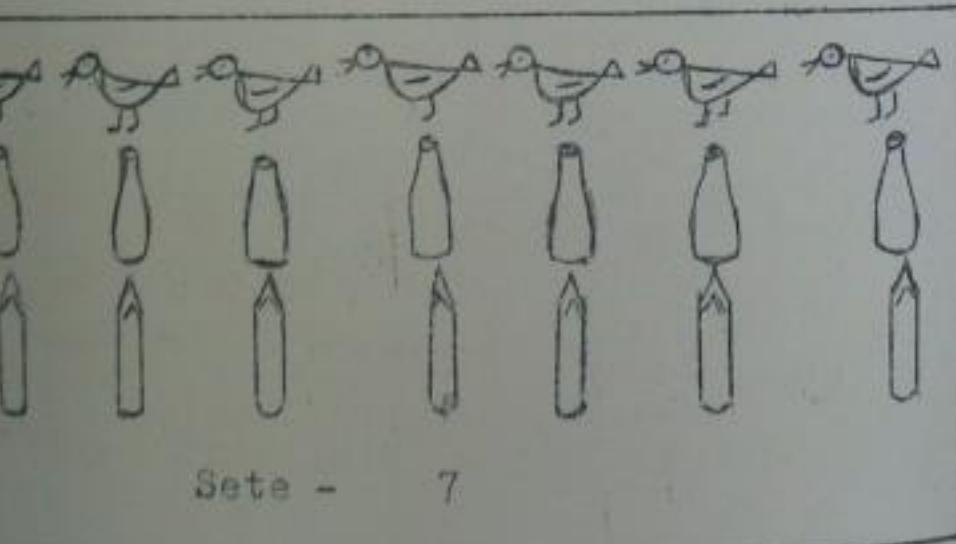
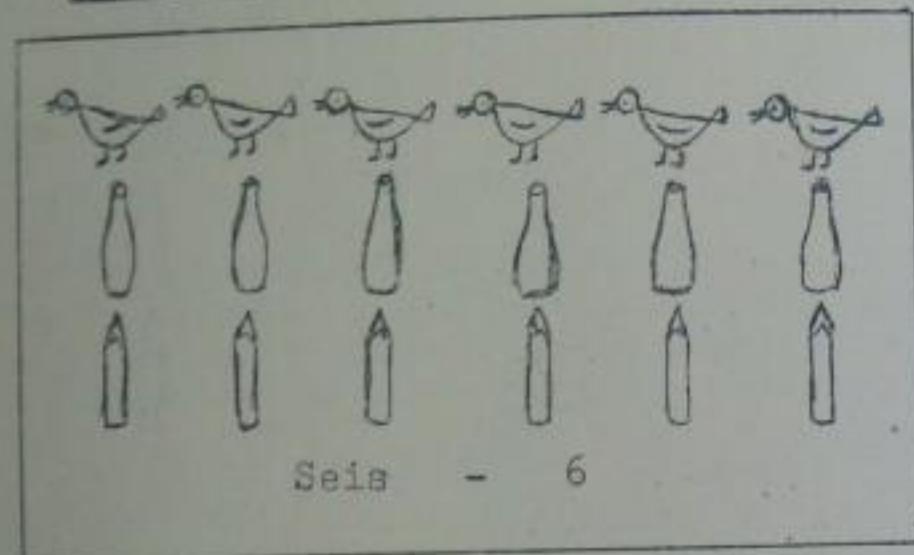
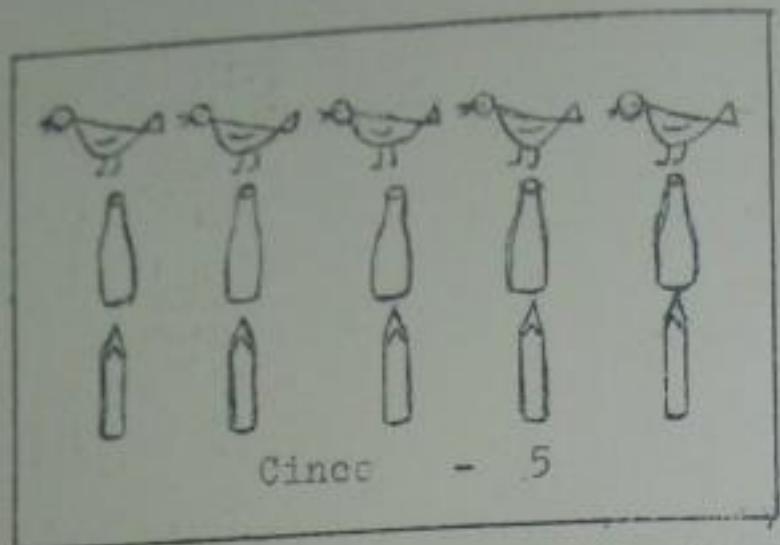
Um só elemento, chamaremos por extenso
de conjunto um. Temos :

Ex: Na figura seguinte, temos um c
junto de pássaros, um conjunto
garrafas e um conjunto de lápis.

Êstes conjuntos são todos coordenáveis entre si . Que têm de comum êstes conjuntos ?-O mesmo número natural. No primeiro desenho, chamaremos um e representaremos pelo sinal 1 . No segundo desenho, chamaremos de dois e representaremos pelo sinal 2 .

Portanto, o que é o 2 ?

-É o sinal (algarismo) convencionado, para representar um determinado número natural, obtido pela correspondência de conjuntos coordenáveis com : [• •]

Portanto, todos os conjuntos coordenáveis com êste, têm o mesmo número natural, o qual será representado por 2 e chamaremos dois -

Do mesmo modo, temos :

O nosso problema é muito mais complexo , pois, não basta fazer corresponder a cada número natural , um sinal e uma palavra .

E' necessário com poucas palavras e com poucos sinais, representarmos qualquer conjunto,por mais elementos que êle possua.

Necessitamos estabelecer novas convenções . Criaremos um " Sistema de Numeração " , que é um conjunto limitado de sinais, convenções e sons orais, utilizados para a representação dos conjuntos, quaisquer que sejam os elementos que êles possuam .

NOTA : 1

Alguns historiadores afirmam que o vo
bulo " algarismo ", vem do persa Kharizmi, região
da Ásia Central, através do árabe Al-Kharizmi, na
ral de Kharizmi, sobrenome do matemático muçulma
Abul Jafar Mcamed Ibn Musa .

Êsses sinais foram idealizados pelos
dús e introduzidos na Península Ibérica, pelos á
bes .

O monge francês Gebert, durante uma
gem à Espanha, pelo ano 980, aprendeu os sinais
sados pelos árabes. Quando mais tarde (999), fo
leito Papa, com o nome de Silvestre II, adotou-os

E X E R C Í C I O S

1- Coordene os conjuntos formados pelas letras
palavras : sim e não .
2- Explique quando dois conjuntos são coordenáve
Dê exemplos .
3- São coordenáveis os conjuntos de letra das p
vras : aluno e escola ?
4- Qual a diferença entre conjunto homogêneo e
junto heterogêneo ? Dê exemplos .
5- Que é o 5 ? Que é o 8 ?
6- Quando vários conjuntos são coordenáveis entr
si, têm o mesmo ....
7- Procure exemplificar os seguintes enunciados
a) Se a cada um de dois conjuntos coordenáveis
se acrescentar ou se suprimir um elemento,
conjuntos resultantes são coordenáveis ?
b) Dados dois conjuntos finitos , ou são coor
náveis ou um dêles é coordenável com uma p
te do outro .
c) Se dois conjuntos finitos estão coordenad
de certo modo, a coordenação será sempre
sível, de qualquer outro modo que se tent
d) Se dois conjuntos finitos não são coorden
veis de certo modo, a coordenação nunca s
possível, qualquer que seja o modo que se
te .

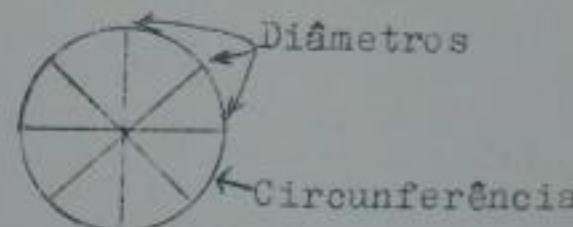
8- Estabeleça a diferença entre número natural e
algarismo .

NOTA 2 :

Os conjuntos classificam-se em :
finitos e infinitos .

Conjunto finito : quando é possível num tempo determinado, se considerar um a um, todos os elementos do conjunto .
Exs: O conjunto de letras da palavra matemática. O conjunto de livros de uma biblioteca.

Conjunto infinito: quando considerando-se um a um os seus elementos, a operação nunca terá fim .
Exs : o conjunto de pontos de um plano.

O conjunto de diâmetros de uma circunferência .

4- SISTEMA DE NUMERAÇÃO DECIMAL

O homem obteve a idéia fundamental da nu
ração, observando que os indivíduos são reunidos
famílias, as famílias em tribos, as tribos em ci
des, as cidades em nações , etc.

Obedecendo a esta indicação prática, pro
rou grupar as unidades simples para formação de u
dades compostas e as unidades gradualmente compos
tas foram constituidas de um modo regular, tomand
sempre um número (sempre o mesmo) de unidades (s
ples e compostas) de uma ordem qualquer, para co
tituirem a de ordem imediatamente superior .

Era necessário então, escolher uma quan
dade padrão, para indicar quantas unidades de
ordem, formariam uma unidade de ordem imediatame
te superior .

Foi escolhida então, uma quantidade cor
pondente a dos dedos das mãos .

O homem foi levado a isso, pelas seguin
razões :

a) Já estava acostumado nas suas transações
rias, a corresponder os elementos de uma
leção qualquer, com os dedos das mãos .
b) Era a coleção mais fácil de carregar e de
tilizar nos momentos de necessidade .
c) E'a pluralidade que mais sente, pelo fato
utilizar os elementos da coleção correspo
dente, nos seus afazeres diários .

Procuremos estabelecer convenções, de t
modo a poder representar uma quantidade qualquer,
por mais elementos que ela possua, utilizando
nas os sinais já inventados .

E'muito fácil. Vejamos a coleção constit
da pelos dedos das mãos. Possue mais um elemento
que a coleção " nove ".

Chamaremos êsse novo número natural de
que será a base de nosso sistema de numeração d
mal. Já convencionamos as palavras :
um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito,
ve, dez .

Assim , que é três ??? - Uma palavra co
qual exprimimos a pluralidade comum a tôda a sér

de conjuntos coordenáveis entre si e com o conjun
to : 000

A coordenação de conjuntos é uma operação
muito frequente na vida prática .

O homem civilizado, para contar objetos e
coordenar conjuntos quando necessário, utiliza como
conjunto de referência, um conjunto fixo, que é o
conjunto dos números naturais .

Contar os elementos de um conjunto é coor
dená-los com os números naturais, começando por um
(1) na ordem em que se escrevem . Por exemplo,con
tar as letras da palavra aluno. Procedemos assim :

A L U N O — Coordenamos portanto, o conjunto
1 2 3 4 5 — de letras da palavra aluno, com o
conjunto dos números naturais de
um a cinco (1 à 5) , que é um conjunto parcial da
série dos números naturais .

Vejamos outro exemplo : contar as letras
da palavra : geologia . Procedemos assim :

G E O L O G I A — Coordenamos portanto, o con
1 2 3 4 5 6 7 8 — junto de letras da palavra :
geologia, com o conjunto dos
números naturais de 1 à 8, que é um conjunto par
cial da série dos números naturais .

Quando contamos os elementos de um conjun
to, o número que corresponde ao último elemento,cha
ma-se : número cardinal do conjunto .

Assim, no primeiro exemplo, o número 5,que
é o que corresponde ao último elemento da palavra ;
aluno, é o número cardinal do conjunto de letras da
palavra. O de geologia é 8 (8 é o número cardinal)

Portanto, o número cardinal de um conjunto,
representa o conjunto .

Convém lembrar que :

a) O número cardinal de um conjunto é sempre o
mesmo, qualquer que seja a ordem em que se con
tam os seus elementos.
E'evidente, pois, quando contamos as letras das
palavras aluno ou geologia, poderíamos ter con
siderado em qualquer ordem, e , mesmo assim ,
ainda obteríamos os mesmos resultados.Vejamos:

a l u n o
1 2 3 4 5
5 4 3 2 1
3 1 2 5 4
5

g e o l o g i a
1 2 3 4 5 6 7 8
8 7 6 5 4 3 2 1
4 5 1 2 6 8 7 3
8

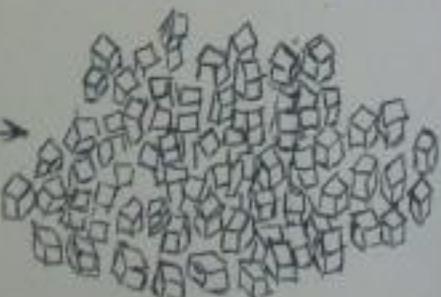
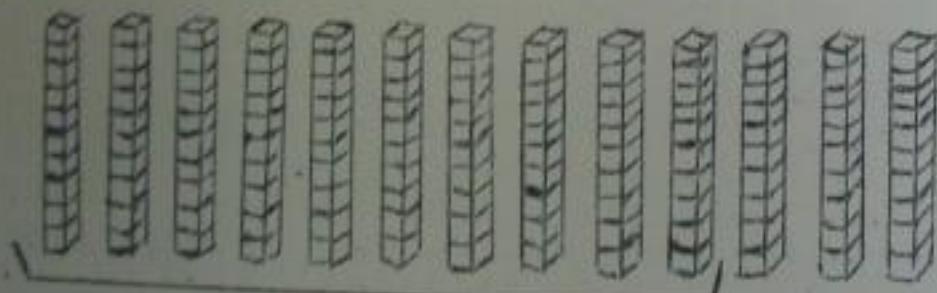
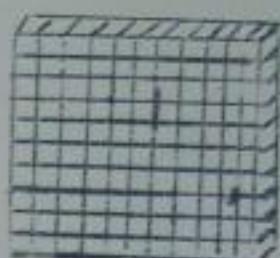
b) Todos os conjuntos coordenáveis entre si, tê o mesmo número natural, qualquer que seja natureza dos elementos .

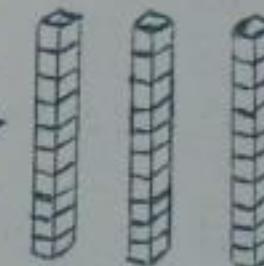
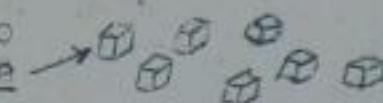
Em face do que foi dito, sentimos a nece sidade de contunuar com a sucessão dos números na rais. Para isso, adotemos a seguinte convenção : " dez unidades de uma ordem, formam uma unidade ordem imediatamente superior " .

Tudo se passa de um modo bastante simpl pois, é suficiente fazermos grupos contendo dez mentos .

Admitamos que vamos contar uma coleção, é constituida por pequenos cubos de madeira .

a) Fase inicial :
Procuremos arrumar os cubos em colunas, con do cada uma, dez elementos .
Temos :

Coleção de cubos →

b) Segunda fase :

Podemos descrever nosso número como :

Uma unidade desta, que chamaremos de: centena →
Formamos esta unidade com 10 colunas destas

Uma unidade desta, que chamaremos de: dezena →
Sobraram 3 desta .

Sobraram :
Sete unidades dêste tipo que chamaremos: unidade →

Portanto, observando a contagem, podemos dizer que possuímos: 1 centena, 3 dezenas e 7 unidades simples .

Levado pelo desejo de aperfeiçoar . cada vez mais o seu sistema de numeração, o homem deixou de escrever aquelas palavras, convencionando que, da direita para a esquerda, a primeira posição será ocupada sempre pelas unidades simples. A segunda posição pelas dezenas e a terceira pelas centenas, etc.

Em face disso, podemos representar a quantidade de cubos de madeira, simplesmente por : 137.

Obtivemos um símbolo constituido por sinais dos já convencionados, para representar tôda a quantidade de cubos . Poderíamos repetir o processo, mesmo que a coleção possuísse mais elementos .

Se nós quizermos por exemplo, representar dez unidades simples, como faremos ? - Ora, dez unidades equivalem a uma dezena e nenhuma unidade simples. Para ocupar a posição das unidades simples, usaremos o símbolo (0)que chamaremos : zero .

Vejamos então, como escreveremos .

...

Temos então :

1 0 ← nenhuma unidade simpes
↑
uma dezena

NOTA : Daquí em diante, usaremos o símbolo zero (
para ocupar a posição das ordens que não p
suirem nenhuma unidade .

O homem, levado pela lei do menor esfôrço
com o objetivo de tornar cada vez mais simples
sistema de numeração, procurou estabelecer outras
convenções :

a)- Formam-se os nomes dos nove números compreend
dos entre duas dezenas consecutivas, acrescen
tando-se sucessivamente ao nome de cada dez
o nome das nove unidades de primeira ordem .

b)- Formam-se os nomes dos números compreendidos
tre duas centenas consecutivas, juntando-se
cessivamente os nomes das dezenas e das unid
des .

c)- Contaremos os milhares por unidades, dezenas
centenas. Formaremos os números compreendido
entre dois milhares consecutivos, juntando s
cessivamente a cada milhar, o nome dos primei
ros novecentos e noventa e nove números .

d)- Se continuássemos a contar, chegaríamos ao nú
ro : novecentos e noventa e nove mil, novecen
tos e noventa e nove, mais um.
A esta quantidade, correspondente a coleção
dez centenas de milhar, daremos,o nome do :
milhão. Formaremos o número compreendido ent
dois milhões consecutivos, juntando sucessiva
mente a cada milhão, os nomes dos novecentos
noventa e nove mil, novecentos e noventa e n
primeiros números .

e)- Do mesmo modo, a coleção de mil milhões, rece
beu o nome de bilhão ; a coleção de mil bilhõ
o de trilhões ; a coleção de mil trilhões o
quatrilhões , etc .

f)- Para não aumentar demasiado o número de pa
vras que designam as diferentes ordens, são
tas grupadas em classes . Assim temos : as cl
ses da direita para a esquerda :unidades, mil
res, milhões, bilhões, trilhões ,etc ...

Portanto, em face do foi dito, para ler um número, devemos dividí-lo em classes de três algarismos, da direira para a esquerda, enunciando depois, cada classe como se estivesse só, dando-lhe o nome correspondente .

A primeira classe da esquerda, podendo possuir um , dois ou três algarismos .

Vejamos o número :

23 843 576 254

- Unidades
- Milhares
- Milhões
- Bilhões

CLASSES

Diremos : vinte e três bilhões, oitocentos e quarenta e três milhões, quinhentos e setenta e seis mil, duzentos e cinquenta e quatro unidades .

Todavia, se o número não tem mais de três algarismos, enunciamos sucessivamente cada algarismo significativo (todos menos o zero) começando pela esquerda e dando o nome das unidades correspondentes .

Exs : 453 - Quatrocentos e cinquenta e três unidades .
807 - Oitocentos e sete unidades .
39 - Trinta e nove unidades .

NOTA : Podemos deixar de enunciar a palavra : " unidades " .

EXERCÍCIOS

1- Ler os seguintes números : 43086 - 683050 - 900008177 .

2- Escrever com algarismos indús, os seguintes números : quatrocentos e oitenta e seis unidades - dois mil quinhentos e quarenta e nove - seis mil e dois - quatro milhões- vinte mil etc .

5- VALORES DE UM ALGARISMO: ABSOLUTO E RELATIVO

Consideremos o seguinte número: 5784 cinco mil setecentos e oitenta e quatro.

Observando-se, constatamos que o alga-rismo 5 (cinco), não está representando o valor para o qual foi criado, pois está indicando u[ma] quantidade correspondente a cinco mil unidades si[m]ples ou cinco unidades de milhar.

Portanto, um algarismo possue dois va[lo]res: um absoluto e outro relativo.

O valor relativo é o valor posicional pois depende da posição que o algarismo ocupa no [nú]mero.

O valor absoluto é o que êle possue qu[an]do está isolado, ou quando ocupa a primeira posi[ção] da direita. E' o valor para o qual foi criado, de[pen]dendo da forma.

Quando um algarismo se desloca num nú[me]ro, para a esquerda, o seu valor relativo aumenta uma vez que passa a representar unidades constitu[í]das por dez unidades do tipo da posição precedent[e].

Exs:

a) Dizer quais os valores absoluto e relati[vo] do algarismo das centenas de milhar, no [se]guinte número: 6786980.
Resposta: valor absoluto: sete
valor relativo: setecentos m[il] unidades.

b) Qual o valor relativo do algarismo 6 no [se]guinte número: 870469.
Resposta: sessenta unidades.

NOTA

Consideremos o seguinte número: 7348[6] qual pode ser decomposto assim:

73486 = 7 dezenas de milhar + 3 unidades de [mi]lhar + 4 centenas simples + 8 dezenas + [6] unidades.
= 70000 + 3 000 + 400 + 80 + 6.

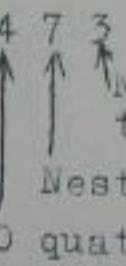
$= 7 \times 10^4 + 3 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 8 \times 10 + 6$

A ordem que o algarismo está ocupando no número, menos uma unidade.

O valor de 7 nêste número, é setenta mil [o]u ainda 7×10^4. Portanto, podemos concluir:

" Para determinar o valor relativo de um algarismo, basta multiplicar o seu valor absoluto pela base, elevada a um expoente igual à ordem que êle ocupa no número, diminuida de uma unidade. "

Ex: Dado o número 78475, qual é o valor relativo do algarismo 8 ?
Temos:
$8 \times 10^3 = 8000$ O oito está ocupando a quarta posição, portanto, a sua ordem é a quarta, menos uma unidade: três. Daí a razão do expoente.

E' evidente que o valor absoluto de um algarismo, vai sendo multiplicado por dez, desde que êle se desloque para a esquerda. Daí dizermos que: " um algarismo escrito à esquerda de outro, vale dez vêzes mais, do que se ocupasse a posição dêste outro ".

Ex: 4 7 3
- Nesta posição o algarismo 4, valeria quatro unidades simples.
- Nesta posição o 4 valeria 4 x 10 ou 40
- O quatro nesta posição vale: 4×10^2 ou 400.

6 - SISTEMAS DE NUMERAÇÃO

Observamos que para contar os elementos de uma coleção, partimos do princípio de que, dez unidades de uma ordem, formam uma unidade de ordem imediatamente superior.

Por exemplo, dez unidades simples formam uma dezena. Dez dezenas formam uma centena.

Esta simples sistema de numeração é o de base dez ou decimal. E'o normalmente empregado, por razões psicológicas e históricas.

Estamos de tal modo acostumados ao n
so sistema de numeração decimal, que nos esquecem
algumas vêzes, que é possível servir-se de uma ba
diferente da do nosso sistema de numeração .

Entretanto, é fácil generalizar as
ções e regras, que são a base de nosso sistema .
preciso frisar que o sistema decimal, nem sempre
o melhor .

O nosso sistema é dito de <u>base dez</u> p
que:

a) Dispomos de dez sinais, para representar qu
quer quantidade, por mais elementos que
possua: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

b) Dez unidades de uma ordem formam uma unida
de ordem imediatamente superior .
Ex : Dez centenas formam um milhar , etc .

c) Um algarismo à esquerda de outro, represent
unidades de ordem imediatamente superior,
que são representadas por êsse outro .

d) Dispomos de tantos sinais, quantas são as
dades da base .

Algarismos necessários para alguns
temas de numeração :

Base	Algarismos
Dois	0, 1
Três	0, 1, 2
Quatro...............	0, 1, 2, 3
Cinco...............	0, 1, 2, 3, 4
Seis	0, 1, 2, 3, 4, 5
Sete...............	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6
etc ...	

<u>PARA FORMAR UM SISTEMA DE BASE QUALQUER</u>

NECESSITAMOS :

a) Dispor de tantos sinais, quantas são as unida
da base .
Ex: No sistema binário temos dois sinais ; 0

b) O número de unidades da base, indica quantas
dades são necessárias de uma ordem, para form
uma unidade de ordem imediatamente superior .

Ex: No sistema de base três, três unidades de uma
ordem, formam uma unidade de ordem imediata-
mente superior .

c) Um algarismo escrito à esquerda de outro, repre
senta unidades de ordem imediatamente superior
às que são representadas por êsse outro .
Ex: 5343(6) devemos ler : cinco, três, quatro,
três , <u>base seis</u> , uma vez que
não convencionamos uma maneira de
ler um número na base seis .

Convém lembrar, que não representa a mes
ma quantidade que o número 5343 da base dez .

O três (3) na primeira posição, da direi
ta, indica três elementos .

O quatro (4) está indicando quatro cole
ções, contendo cada uma, seis elementos, etc .

A invenção da <u>numeração relativa</u>, atri -
buida aos sumérios e desenvolvida pelos indús, foi
de enorme importância para a humanidade.

Os sistemas anteriores de numeração, es
tavam baseados num simples princípio aditivo.

O sistema romano era aditivo; os siste-
mas egípcio hebraico e grego, eram de um tipo pare
cido com o dos romanos .

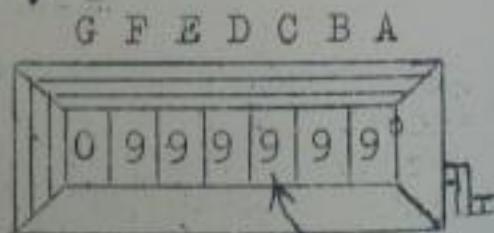
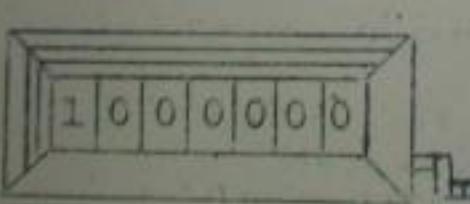
Um inconveniente da notação aditiva é
que, quanto maior é o número, mais símbolos serão
necessários para representá-lo .

<u>E X E R C Í C I O S</u>

1- Qual o sistema de numeração universalmente ado-
tado ? E no Brasil ?
2- Escreva o maior número possível na base dez, uti
lizando os seguintes algarismos : 8, 4, 9 e 7 .
3- Calcule o número de classes em que fica dividido
o número : quarenta e oito milhões, quinhentos e
quarenta e quatro mil, trezentos e quarenta e no
ve .
4- No número : 7434532, qual o valor absoluto do al
garismo que representa <u>centenas de milhar</u> e qual
o seu valor relativo ?
5- Qual o maior número de cinco algarismos arábicos

diferentes ? Como se escreve êste número ?
6- No sistema decimal, 100 unidades de terceira ... dem, formam 10 unidades de que ordem ? Forma... ainda uma unidade de que ordem ?
7- Zero é um algarismo significativo ?
8- O zero (0) indica ausência ou presença de uni... des ?
9- Quantas ordens há no número 7.568.043.280 ?
10-Um número tem quatro classes. A sua classe de ... lhares poderá ter dois algarismos ?
11-Quantos zeros (0) precisamos pospôr ao número 587, para que o algarismo das dezenas, passe ... representar unidades de milhar ?
12-Se eu colocar um zero (0) entre os algarismos ... número : 76, êle aumentará ou diminuirá ? ... será o novo valor relativo do sete ?
13-Estabeleça a diferença entre o valor absoluto ... o valor relativo de um algarismo. Dê exemplos.
14-Qual dêstes números : 17, 017 e 0017 é o maio...
15-Quais os algarismos utilizados na base sete ...
16-Quais os sinais comuns à todos os sistemas de ... meração ?
17-Quantos sistemas de numeração existem ?
18-Em que se distinguem uns dos outros, os siste... de numaração ?

7 - APLICAÇÃO PRÁTICA

Máquina de contar :

Esta máquina permite contar até nove... lhões, novecentos e noventa e nove mil, novecen... e noventa e nove .

Se em tôdas as janelas, só aparecer ... e se você girar a manivela, verá que, para cada ... ta, irá aparecendo na janela A , os sinais na ...

...correspondente de grandeza : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ... Quando aparecer o 9, dando-se mais uma volta, fi...a na janela A o zero e na janela B fica o 1 ; se ...ermos mais dez voltas na manivela, a janela A, fi...ará novamente com zero e a janela B com 2 e assim ...sucessivamente .

8 - REPRESENTAÇÃO GEOMETRICA DOS NÚMEROS

Os homens observaram, que algumas vêzes ... de grande utilidade representar os números median...te segmentos iguais de uma reta .

Observamos inicialmente que certos con...juntos eram substituidos por outros coordenáveis , ...porém, fáceis de manejar .

Os rebanhos eram substituidos por sei...os , palitos, etc.

Quando representamos os números por seg...mentos, as suas propriedades serão traduzidas pelas ...propriedades geométricas dos segmentos .

Assim, por exemplo, se sôbre uma reta , ...tomarmos um ponto O e a partir dêste, marcarmos seg...mentos sucessivos iguais, obteremos os pontos A, B, ..., D, E ....

O número um (1) será representado por ... A , o número dois (2) será representado pelo seg...mento OB , formado pelo conjunto de dois segmentos. ... três (3) pelo segmento OC , etc .

O A B C D E F G H I J L M N

O A = 1 ...um

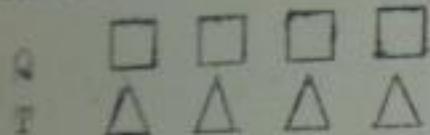
O A B = 2 ...dois

O A B C = 3 ...três

Observamos que nesta representação, números iguais , correspondentes a segmentos iguais e a números desiguais, segmentos desiguais.

9- A IGUALDADE E SUAS PROPRIEDADES
CONCEITO DE DESIGUALDADE

a) A IGUALDADE

Consideremos dois conjuntos. Um de q[uadrados e o outro de triângulo, possuindo o mes[mo número cardinal. Eles são portanto coordenáveis.

Q □ □ □ □ (conjunto de quadrado[s)

T △ △ △ △ (conjunto de triângul[os)

Indiquemos a quantidade de elementos [do conjunto de quadrados pela letra Q e a quantida[de do conjunto de triângulos pela letra T. Q = [T

Devemos ler : Q é igual a T.

Esta expressão é o que chamamos uma [i]gualdade. Na igualdade devemos considerar dois [mem]bros. O primeiro é o que fica à esquerda, o segu[ndo] o que fica à direita.

Igual a
Igualdade

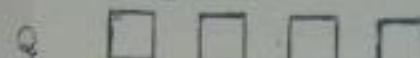
1º membro → Q = T ← 2º membro

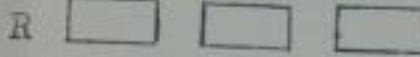
Têrmos

PROPRIEDADES :

1) Q = Q, T = T — REFLEXIVA : " Qualquer quantid[ade] é igual a ela mesma ".

2) Q = T T = Q — RECÍPROCA : " Se Q é igual [a T], T é igual a Q ".

3) Q = T, T = R logo Q = R — TRANSITIVA : " Se o [con]junto de quadrados é [co]ordenável com o conjunto de triângulos e [o] conjunto de triângulos é coordenável com [o] conjunto de retângulos, resulta que o con[jun]to de quadrados é coordenável com o conju[nto d]e retângulos.

Q □ □ □ □ (Quadrados)

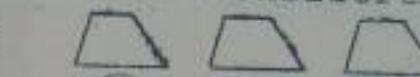
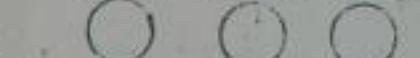
T △ △ △ △ (Triângulos)

R ▭ ▭ ▭ ▭ (Retângulos)

b) A DESIGUALDADE

Quando dois conjuntos não são coordená[v]eis entre si, têm desigual número natural.

Portanto, podemos dizer que :

[N]úmeros desiguais são os que representam conjun[t]os não coordenáveis.

Consideremos dois conjuntos :

T ⏢ ⏢ ⏢ ⏢ (Trapézios)

C ○ ○ ○ (Círculos)

Podemos representar : (T maior do que [C]) T > C. Logo, um conjunto T é maior que ou[t]ro conjunto C, quando o conjunto que representa C [é] coordenável com "uma parte" do conjunto que repre[s]enta T.

Poderíamos também escrever : C < T (C menor que T). Logo um número C é menor do que [o]utro T, quando o conjunto que representa C, é coor[d]enável com "uma parte" do conjunto que representa T.

[C]onclusão : Dados dois números A e B, necessàriamente tem que se verificar uma e uma só destas três possibilidades.

A = B . A > B ou A < B

[N]OTA :

SINAIS DUPLOS DE DESIGUALDADE

Se uma das três possibilidades não se verifica, necessàriamente tem que se verificar uma das outras duas.

Vejamos então :

1)- Se A não é igual a B , então :

A > B ou A < B

2)- Se A não é maior que B , então :

A = B ou A < B

3)- Se A não é menor que B , então :

A = B ou A > B

- Para exprimir que um número não é igual a outro , se emprega o sinal ≠ , que é o sinal = cruzado por um traço .

- Para exprimir que não é maior que outro emprega-se o sinal : ≯

- Para indicar que não é menor que outro emprega-se o sinal : ≮

Empregando-se os sinais :
as relações (1), (2) e (3) podem escrever-se :

Se A ≠ B , então A ≶ B
Se A ≯ B , então A ≤ B
Se A ≮ B , então A ≥ B

Observamos que o sinal ≠ (diferente de), equivale ao sinal ≷ (maior ou menor que)

O sinal ≯ (não maior) equivale ao sinal ≤ (igual ou menor que)

O sinal ≮ (não menor) equivale ao sinal ≥ (igual ou maior que) .

EXERCÍCIOS

1)- Estabeleça a relação adequada entre os números 3 e 5 , 9 e 7 .
2)- Em um ônibus que tem 20 poltronas, entraram pessoas e não ficam pessoas de pé. Que relação pode escrever ?

3)- Eu não possuo 10 lápis, se o número fôr X . Quais as relações que você pode escrever ?
4)- Pedro é mais rico que João e menos que o seu colega Antônio. Qual é o mais rico dos três ?
5)- Um trem não é capaz de transportar 500 passageiros, mas, tem mais lugares que outro que pode transportar 300. Pode o 1º transportar 300? Pode o 2º transportar 500 ?
6)- Aplicar o caráter recíproco à igualdade: A = B
7)- Aplicar o caráter transitivo às seguintes igualdades : A = B e B = C

T = Q e Q = R

10- NUMERAÇÃO ROMANA

Aprendemos a representar as quantidades por meio dos algarismos indú-arábicos .
É conveniente aprendermos a representar os números com auxílio dos algarismos romanos .
Êstes algarismos são do alfabeto latino.
Usam-se os algarismos romanos para indicar as datas das inscrições comemorativas, as horas nos mostradores dos relógios, para numerar capítulos dos livros, para designar nomes de reis, etc .
São êles os seguintes :

I	V	X	L	C	D	M
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
1	5	10	50	100	500	1000

Temos necessidade de saber os valores correspondentes em algarismos indús, para podermos sentir as quantidades que êles representam .
O modo de ler e escrever, baseia-se nas seguintes observações :

1) Os algarismos I, X, C, M, podem ser repetidos no máximo três vêzes, sendo que os demais não podem ser repetidos .
Exs: XX 20
III 3
CCXXIII....... 223

MMCCXII 2213
LXXV .... 75 etc .

b) Todo algarismo à direita de outro, de maior [illegible]lor ou igual, soma-se o seu valor a êste outr[illegible]
Exs: XXXVII = 37 CCLVIII = 258
CCXXV = 225 LXXXVI = 86

c) Todo algarismo à esquerda de outro de maior [illegible]ler, subtrae-se o seu valor dêste outro .
Exs: IV = 4 CDXLIV = 444
XC = 90 CMLXXIX = 979

d) Todo algarismo entre dois outros de valores [illegible]iores , subtrae-se o seu valor do da direit[illegible]
Exs: DXC = 590 XIV = 14
MCD = 1400 MMCDL = 2450

e) Todo número representa unidades de : mil, um [illegible]lhão , um bilhão de vêzes maior, quando vem [illegible]cimado por um, dois, três ou mais traços.
Exs:
$\overline{IV}$ = 4000 $\overline{\overline{XX}}$DCCXXXIV = 20000734.

EXERCÍCIOS

1- Escreva a sucessão dos números naturais até [illegible] Quantas vêzes figura o algarismo 2 ?
2- Escreva com algarismos romanos : 11, 439, [illegible] 60005, 333, 7689, 10038, 23, 79873, 7000000, 127008 .
3- Escreva com algarismos indús os seguintes nú[illegible]ros : XCVI, DCXIX, MCDLIII, VIICMLXXV .
4- Entre os números dados, risque com traço ver[illegible] lho os pares; com traço azul os ímpares; com traço amarelo os simples ; com um traço ver[illegible] os compostos.
: 9, 205, 76, 456, 3, 65, 768, 908, 4, 342, 214, 20378, 356, 956, 47, 11, 80, 1219, 52[illegible]
5- Pedro é maior que Maria e menor que Jorge. Qual é o maior dos três ?
6- Minha casa é menor que a de B e maior que a [illegible] C . Qual das três é a menor ?

II - OPERAÇÕES

As operações aritméticas classificam-se [illegible]m operações de : composição ou diretas e operações [illegible]e : decomposição ou inversas .

– A adição, a multiplicação e a potencia-[illegible]ão, são operações diretas, porque nelas, conhecen-[illegible]o-se certos dados, determina-se o resultado .

– A subtração, a divisão, a radiciação e [illegible] logaritmação são operações inversas, porque nelas [illegible]onhecendo-se o resultado da operação direta corres-[illegible]ondente, e um de seus dados , determina-se o outro.

A subtração é inversa da adição ; a divi-[illegible]ão é inversa da multiplicação ; a radiciação e a [illegible]ogaritmação são inversas da potenciação .

OPERAÇÕES

DIRETAS		INVERSAS
1- Adição	2-	Subtração
3- Multiplicação......	4-	Divisão
5- Potenciação.......	6-	Radiciação
	7-	Logaritmação

1 - ADIÇÃO

A primeira operação aritmética que se [illegible]onheceu foi a adição. Para se resolver esta opera-[illegible]ão, sempre se recorreu á elementos concretos , uma [illegible]ez que, não se havia ainda chegado à um grau sufi-[illegible]iente de abstração.

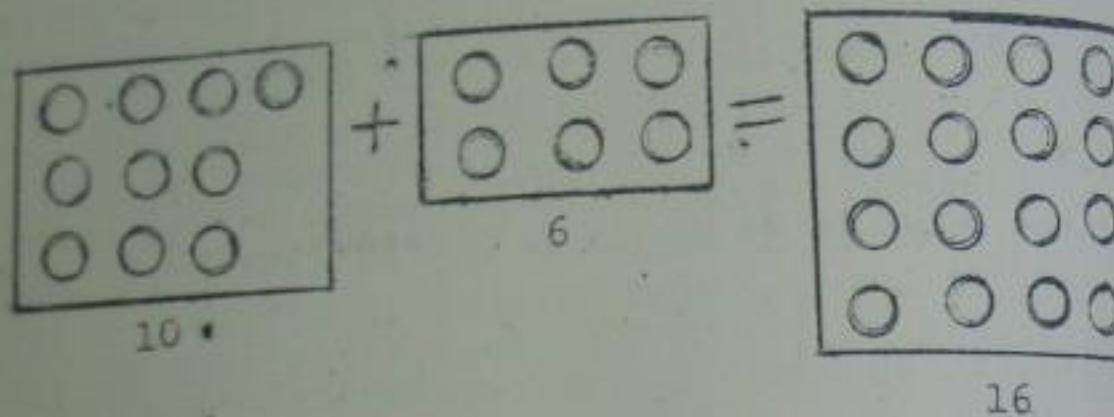
Na América, os incas, que alcançaram ele-[illegible]ado nível cultural, praticavam a soma, fazendo uns [illegible]ós, em cordas de vivas côres .

A adição é a operação mais simples, e da [illegible]ual tôdas as outras dependem . A idéia de adicio-[illegible]ar está subordinada diretamente à noção de conta-[illegible]em .

Consideremos duas caixas, contendo bolas

de bilhar. Uma com dez bolas e a outra com seis. Quantas bolas há nas duas caixas ?

Para responder esta pergunta, é sufi- te formar uma coleção contendo as bolas das caixas e contar os seus elementos.

Isto é :

10 + 6 = 16

+ (mais)

Êste sinal indica que, reunindo os elementos das duas coleções, obteremos uma coleção igual .

Depois de feita a contagem, constata- que o conjunto formado pelas coleções de bolas duas caixas, tem 16 elementos .

Devemos ler : dez mais seis é igual dezesseis .

Representamos o adicionando por (A), o adicionador por (a) e a soma por (T).

Teremos : $A + a = T$ ← Total ou soma

Adicionando Adicionador

Podemos definir a adição como :

ADIÇÃO é a operação que tem por objetivo determinar o número de elementos da coleção constituida por todos os elementos e sòmente êstes, de duas ou mais coleções dadas .

Admitamos que você possua 12 livros de Matemática e comprou mais 7. Ficou com 19 livros .

A quantidade que você possuia é o adicionando (12) e a quantidade comprada é o adicionador (7). A quantidade resultante é a soma ou total (19).

Temos : $12 + 7 = 19$

Observe que o adicionando exerce sempre o papel passivo, enquanto o adicionador o papel ativo.

REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DA SOMA DE DOIS NÚMEROS

Para obter a representação geométrica da soma, é muito simples . Basta que, à partir da origem de uma semi-reta, ir aplicando sucessivamente, segmentos iguais às parcelas consideradas .

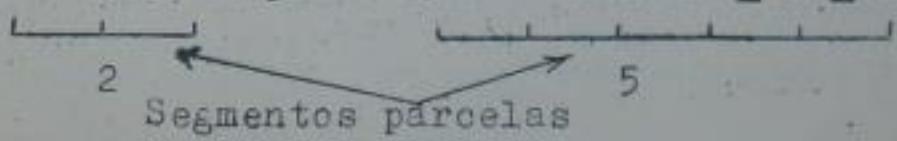
O segmento soma, será dado pelo conjunto de todos os segmentos parcelas .

Vamos representar a soma de 2 e 5 .

2 5

Segmentos parcelas

2 5

7

Segmento soma

2 - SUBTRAÇÃO

Admitamso agora, que conhecendo a soma de dois números e um dêles, necessitamos determinar

o valor do desconhecido. Teremos um problema inv
so da adição.

Em vez de uma composição, necessitamo
fazer uma decomposição .

Ex : 12 + ● = 15 ← Soma ou total

Parcela conhecida — Parcela desconhecida ou incógnita

Faremos então a seguinte pergunta : Qu
o número que devemos somar a 12 , para obtermos
número 15 ?

O homem resolveu êste problema, cria
uma nova operação, chamada <u>subtração</u> .

Escreveremos assim :

15 - 12 = 3 ← Resto, excesso diferenç

Minuendo — Subtraendo — Têrmos

Devemos ler : <u>Quinze</u> menos (-) <u>doz</u> <u>igual a 3</u> .

O quinze (soma) recebeu agora o no
minuendo. A parcela conhecida (12), recebeu
ra o nome de subtraendo . A parcela desconheci
incógnita, os nomes de : resto, excesso ou dife
ça .

Podemos portanto enunciar a seguint
finição :

<u>SUBTRAÇÃO</u> é a operação que tem por
tivo, dados a soma de dois números e um dêles, d
minar o outro .

No campo dos números naturais, a sub
ção de dois números só é possível, quando o min
do é maior que o subtraendo .

O minuendo exerce sempre o papel pa
e o subtraendo o papel ativo .

Podemos escrever, de acôrdo com a o
do nosso problema :

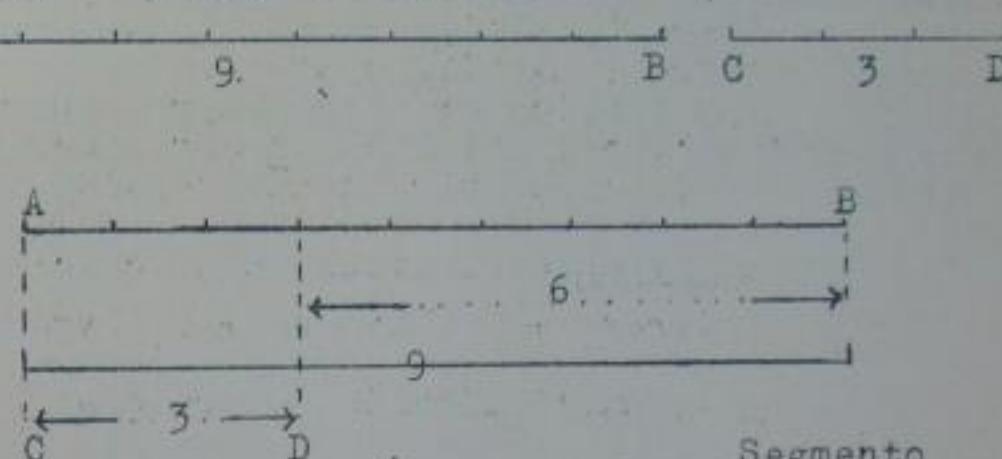
Vejamos o seguinte exemplo :

Observando a igualdade, podemos enunciar a propriedade fundamental da subtração :

" <u>O minuendo é igual ao subtraendo mais o resto</u>".

<u>REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DA DIFERENÇA DE DOIS NÚMEROS</u> .

Seja representar geomètricamente a diferença : 9 - 3 = ?

A 9 B C 3 D

3 - <u>MULTIPLICAÇÃO</u>

Na prática da adição, surgiu um novo problema : uma adição de parcelas iguais .

Ex : 8 + 8 + 8 + 8 = 32 ← Soma ou total

Parcelas — <u>4</u> número de parcelas.

Os matemáticos convencionaram uma fórmula mais simples, para representar uma adição de parcelas iguais, surgindo então uma nova operação, chamada : <u>multiplicação</u> .

A multiplicação é uma operação direta ou

ou de composição. Escrevemos o 4, seguido de um
ou um ponto (.) e o valor da parcela .

Ex : 4 x 8 = 32 ← Produto

Multiplicador — Fatôres — Multiplicando

Devemos ler : Quatro multiplicado por oito é igual a 32 .

Portanto, temos :

MULTIPLICAÇÃO é a operação que tem por objetivo, determinar uma soma de tantas parcelas iguais a um número (multiplicando), quantas são unidades do outro (multiplicador).

O multiplicador será sempre abstrato, podendo no entanto, o multiplicando ser concreto ou abstrato, dependendo de vir ou não seguido de unidade .

Ex :a) 3 x 5 livros =(multiplicando concreto)
= 5 livros + 5 livros + 5 livros

b) 3 x 8 =(multiplicando abstrato)
= 8 + 8 + 8 (3)

NOTA :

Quando não sabemos qual o problema que deu origem a uma determinada multiplicação, não podemos reconhecer qual dos fatôres é o multiplicando .

Ex : 3 x 7 . Podemos escrever, de acôrdo com a definição :

7 x 3 = 21 → Produto

Multiplicador — Multiplicando

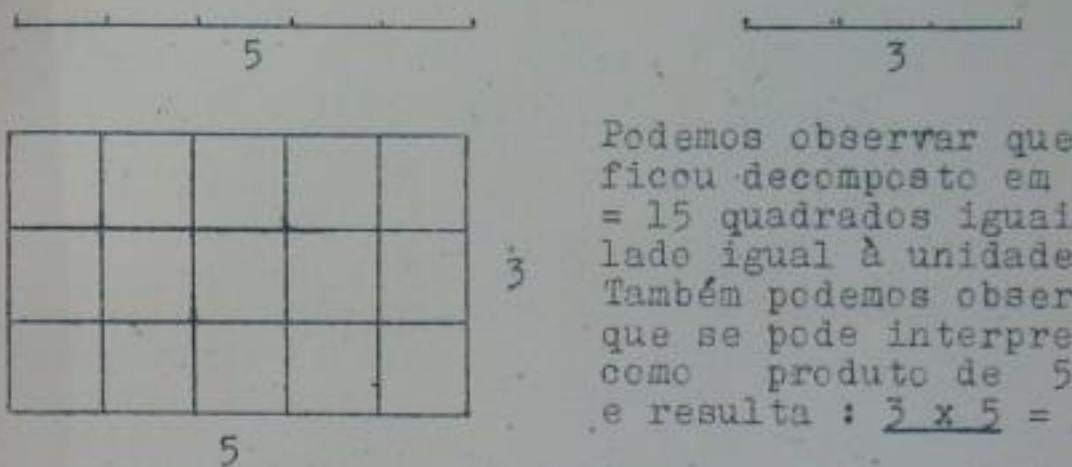
M x m = P

REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DO PRODUTO DE DOIS NÚMEROS

Seja representar o produto de 3 x 5 .Devemos construir um retângulo que tenha por lados,os segmentos AB e CD .

O produto é representado pela superfície do retângulo, cuja base tem 5 unidades e a altura 3 unidades .

5 3

3 5

Podemos observar que êle ficou decomposto em 3 x 5 = 15 quadrados iguais, de lado igual à unidade .
Também podemos observar , que se pode interpretar como produto de 5 x 3 e resulta : 3 x 5 = 5 x 3

4- DIVISÃO

A divisão é a operação inversa da multiplicação. E' uma operação de decomposição.

Admitamos que você, abrindo um livro, encontrasse o seguinte produto.

8 x ◎ = 32 ← Produto
Fatôres

E' evidente que surgiria na sua mente, a seguinte pergunta : Por qual número devo multiplicar 8 , para obter 32 ?

Para resolver êste problema, surgiu uma nova operação, chamada : divisão .

Teremos :

32 : 8 = 4 ← Quociente (q)

Dividendo (D) — Divisor (d) — Têrmos

O "produto" recebeu um novo nome : div
do. O " fator conhecido " de divisor . O "f
procurado" ou " incógnito " de quociente .

Veja bem! O quociente indica quantas
zes o número contém outro , ou quantas vêzes um
mero está contido noutro.

Ex : O quociente de 32 por 8 é 4, porque 32
tém 8 quatro vêzes ou então porque 8 está co
do quatro vêzes em 32, ou ainda 32 é igual a
tro vêzes 8 .

Poderemos então, estabelecer a defin

DIVISÃO é a operação que tem por ob
vo, dado o produto de dois números e um dêles,
terminar o outro .

NATUREZA DO QUOCIENTE

a) Quando o dividendo é o divisor fôrem número
concretos, da mesma natureza, o quociente
um número abstrato .

Ex : Com 32 laranjas, quantos pacotes de
tro laranjas, poderemos fazer ?

32 laranjas | 4 laranjas
0 8

Resposta : 8 pacotes

b) Quando o divisor fôr um número abstrato, o
ciente será da mesma natureza do dividendo

Ex : Distribuir 32 laranjas por 4 menin
Quantas laranjas recebe cada menino

32 laranjas | 4
0 8 laranjas

Resposta : 8 laranjas

Na determinação do " quociente de
números " há duas hipóteses a considerar .

1- O número contém outro, um núme
teiro de vêzes .

Ex : Dividir o número 45 po

Dividendo → 45 | 9 ← Divisor
Resto → 0 5 ← Quociente

Nêste caso, diremos que a divisão é exata . Podemos escrever :

$$D = q \times d$$

e enunciar : " O dividendo é igual ao produto do quociente pelo divisor " .

2- O número não contém outro, um número inteiro de vêzes .

Ex:
Dividendo → 47 | 9 ← Divisor
Resto → 2 5 ← Quociente

Nêste caso, a divisão é dita aproximada. Podemos escrever :

$$47 = 5 \times 9 + 2$$

Dividendo = quociente x divisor + resto

$$D = q \times d + r$$

Podemos fazer a tradução verbal, sob a seguinte forma :

" O dividendo é igual ao produto do quociente pelo divisor , mais o resto " .

5- POTENCIAÇÃO

Consideremos um produto, constituido por fatôres iguais .

Ex: $7 \times 7 \times 7 = 343$ ← Produto

Fatôres 3 número de parcelas

Podemos escrever o sete (7), e a direita um pouco acima, um número que contenha tantas unidades, quantos são os fatôres considerados .

Temos então :

$$7^3 = 343$$

O sete (7) recebeu o nome de base […] de expoente . O 343 de potência .

expoente → $7^3 = 343$ ← potência

base

Podemos portanto, concluir que a po[…]cia de um número, é um produto de fatôres igua[…] êsse número .

Ex:

$$4^2 = 4 \times 4 = 16$$

$$11^2 = 11 \times 11 = 121$$

$$5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$$

Temos então :

$$b^e = P$$

(base → b ; e ← expoente ; P ← Potência)

6- RADICIAÇÃO

Admitamos que seja desconhecida a […] de uma potência .

base = ? → $?^3 = 125$ (3 ← expoente ; 125 ← potência)

Faremos então a seguinte pergunta: […] o número que elevado ao cubo (terceira potê[…] é igual a 125 ?

Para responder a pergunta , os ma[…]cos idealizaram um novo símbolo operatório, […] o radical .

Radical → $\sqrt{\ }$

Temos :

$$\sqrt[3]{125} = 5$$

(3 ← índice do radical ; 125 ← radicando ; 5 ← raiz ; $\sqrt{\ }$ ← radical)

Devemos ler : Qual o número que […]

[…] ao cubo é igual a 125 ? Ou qual a raíz cúbica de […]125 ? Ou ainda ; 125 é o cubo de qual número ?

Esta nova operação, recebeu o nome de : […]radiciação , que é uma operação inversa da potencia[…]ção . E' uma operação de decomposição . Portanto :

RADICIAÇÃO é a operação que tem por ob[…]jetivo determinar a base , quando nós conhecemos a potência e o expoente .

$$\sqrt[i]{R} = r$$

i= índice do radical
R= radicando
r= raíz

Logo :

$$R = r^i$$

O radicando é igual a raiz , elevada ao índice do radical.

7 - LOGARITMAÇÃO

A logaritmação é outra operação inversa […]a potenciação. E' portanto, uma operação de decom[…]osição .

Admitamos que não conhecemos o valor do […]xpoente .

base → $7^{?} = 343$ (? ← expoente = ? ; 343 ← potência)

Faremos então a seguinte pergunta : A […]ual número devemos elevar 7 , para obtermos 343 ?

Os matemáticos inventaram uma nova opera[…]ão, chamada logaritmação . Portanto :

LOGARITMAÇÃO é a operação que tem por […]bjetivo , determinar o expoente, quando nós conhe[…]emos a base e a potência .

$$\log_7 343 = 3$$

Devemos ler : logarítmo de 343, base […]ete , é igual a 3 . A logaritmação é muito im[…]ortante na vida, para simplificação dos cálculos .

$$7^3 = 343$$

O sete (7) recebeu o nome de base e
de expoente . O 343 de potência .

expoente → $7^3 = 343$ ← potência
base

Podemos portanto, concluir que a potê
cia de um número, é um produto de fatôres iguais
êsse número .

Ex:

$$4^2 = 4 \times 4 = 16$$

$$11^2 = 11 \times 11 = 121$$

$$5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$$

Temos então :

base → $b^e = P$ ← Potência (e ← expoente)

6- RADICIAÇÃO

Admitamos que seja desconhecida a ba
de uma potência .

base = ? → $◎^3 = 125$ (3 ← expoente; 125 ← potência)

Faremos então a seguinte pergunta: Q
o número que elevado ao cubo (terceira potênci
é igual a 125 ?

Para responder a pergunta , os mate
cos idealizaram um novo símbolo operatório, cha
o radical . Radical → $\sqrt{}$

Temos :

$$\sqrt[3]{125} = 5$$

(índice do radical → 3; ← radical; radicando → 125; 5 ← raiz)

Devemos ler : Qual o número que ele

ao cubo é igual a 125 ? Ou qual a raíz cúbica de 125 ? Ou ainda ; 125 é o cubo de qual número ?

Esta nova operação, recebeu o nome de : radiciação , que é uma operação inversa da potenciação . E' uma operação de decomposição . Portanto :

RADICIAÇÃO é a operação que tem por objetivo determinar a base , quando nós conhecemos a potência e o expoente .

$$\sqrt[i]{R} = r$$

i= índice do radical
R= radicando
r= raíz

Logo : $\boxed{R = r^i}$

O radicando é igual a raiz , elevada ao índice do radical.

7 - LOGARITMAÇÃO

A logaritmação é outra operação inversa da potenciação. E' portanto, uma operação de decomposição .

Admitamos que não conhecemos o valor do expoente .

base → $7^{◎} = 343$ (◎ ← expoente = ? ; 343 ← potência)

Faremos então a seguinte pergunta : A qual número devemos elevar 7 , para obtermos 343 ?

Os matemáticos inventaram uma nova operação, chamada logaritmação . Portanto :

LOGARITMAÇÃO é a operação que tem por objetivo , determinar o expoente, quando nós conhecemos a base e a potência .

$$\log_7 343 = 3 \quad (◎ = ?)$$

Devemos ler : logarítmo de 343, base sete , é igual a 3 . A logaritmação é muito importante na vida, para simplificação dos cálculos .

EXERCÍCIOS

1) Traduzir sob forma simbólica (com letras), os seguintes enunciados :
   a- A soma dos números 5 e 7 é igual a 12 .
   b- A soma de dois números iguais, é igual a 1
   c- A soma de dois números pares e consecutivo igual a 26 .
   d- A soma de dois números ímpares e consecuti é igual a 32 .
   e- A soma de dois números inteiros e consecu vos é igual a 15 .
   f- A soma de dois números diferentes é igual 12 .
   g- A diferença de dois números é igual a 7
   h- O produto de dois números é igual a 70.
   i- O quociente de dois números é igual a 8.
   j- Um número elevado ao quadrado é igual a
   l- A raiz quadrada de 900 é igual a 30 .
   m- O logaritmo de cem na base <u>dez</u>, é igual
2) Quais são as operações diretas ou de decompo ção ? Formular problemas com as operações retas .
3) Quais são as operações inversas ou de decomp ção. Formular problemas com as operações in sas .
4) Qual a operação direta, que apresenta duas ções inversas ?
5) Traduza sob forma verbal, as seguintes expre sões :
   a-) $12 + 4 = 16$
   b-) $18 - 5 = 13$
   c-) $3 \times 8 = 24$
   d-) $12 : 4 = 3$
   e-) $24 : 3 = 8$
   f-) $7^2 = 49$
   g-) $4 \times 8 - 8 = 3 \times 8$
   h-) $4 \times 8 + 8 = 5 \times 8$
   i-) $6^{●} = 36$
   $\log_6 36 = ?$
   j-) $●^2 = 64$
   $\sqrt{64} = ?$

III - O P E R A Ç Õ E S

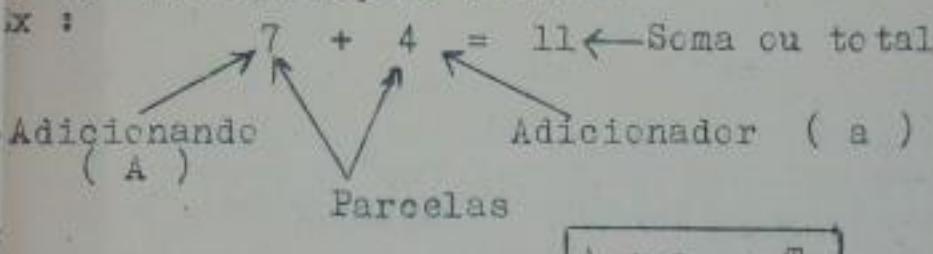
A D I Ç Ã O

1- <u>Definição</u>

<u>ADIÇÃO</u> é a operação que tem por objetivo determinar o número de elementos da coleção constituida por todos os elementos e sòmente êsses de duas ou mais coleções dadas .

Ex : 7 + 4 = 11 ← Soma ou total

Adicionando (A) — Adicionador (a) — Parcelas

$A + a = T$

2- <u>Propriedades</u>

a) <u>UNÍVOCA OU UNIFORME</u> : Esta propriedade significa que , a soma de dois números é sempre única e bem determinada .E' evidente,pois o conjunto <u>soma</u> será sempre constituido pelos elementos, que compõe os conjuntos <u>parcelas</u> .Ora, se o número dêstes não varia, é claro que a soma também não variará .

Ex : $7 + 8 = 7 + 8$

b) <u>MODULAR</u> : Significa que, se adicionarmos <u>0</u> (zero) a qualquer quantidade, ela não se altera. <u>0</u> zero será considerado o <u>módulo</u> da adição .

Ex : $11 + 0 = 11$

Admitamos um tanque com uma certa quantidade de água ; se <u>derramarmos</u> nêsse tanque a água contida numa lata vazia, êle ficará com mais água ??

c) <u>COMUTATIVA</u> : A adição é comutativa, porque não se altera com a modificação da ordem das parcelas. Consideremos o seguinte exemplo :

Formada diante de um elevador, três filas de pessoas. Uma com quatro pessoas, outra com cinco e a terceira com sete. Qualquer que seja a ordem de

nidade e 2 dezenas ; 2 dezenas e 12 dezenas são
dezenas, que equivalem a 4 dezenas e 1 centena
1 centena com 20 centenas são 21 centenas .
Na prática, devemos fazer asim :

4 , 6, 12, 21
um, vão dois
5 ,10, 14
quatro, vai um
5, 13, 16, 21

NOTA : Devemos usar o
nor número possív
de palavras, para
conomizar tempo e
fetuar a operação
com rapidez .

4- Provas

Prova é uma operação, ou várias opera-
ções efetuadas , para verificar se uma determin
operação está certa .

Não tem grande utilidade prática.O i
é que você aprenda a fazer as operações com segu
ça e rapidez .

Vejamos, apenas por curiosidade, os
guintes processos normalmente usados :

a) Pela aplicação da propriedade comutativa. E
tuamos a soma das parcelas de baixo para ci
ou em qualquer ordem . Se obtivermos um res
do igual ao já encontrado, a operação estar
possivelmente certa. Usamos a palavra possi
mente, porque a pessoa pode cometer o mesm
gano (êrro).

Ex :

```
 1201
  528
  437
+ 236
 1201
```

b) Pela aplicação da propriedade associativa,
tuamos a soma de duas ou mais parcelas sep
mente e depois adicionamos o resultado às
das outras parcelas .

Vejamos com um exemplo :

Ex :

```
 2543
  124
 3427 ________ 6094
   38
+ 512          +550
 6644          6644
```

5- Cálculo rápido

Como você sabe, a operação da adição é
muito simples e não apresenta normalmente dificulda-
des. No entanto, os êrros ocorrem na adição, como
nas outras operações aritméticas .

E'de grande importância para a vida prá-
tica, que uma pessoa saiba somar com rapidez e cor-
reção .

Existem vários processos : Vejamos al-
guns :

A) Adição da direita para a esquerda

Ex : Somar 4274 com 325, por exemplo, é melhor so-
mar primeiro 300, depois 20 e finalmente 5 .
Portanto, êste caso apresenta três fases :

1º) 4274 + 300 4574
2º) 4574 + 20 4594
3º) 4594 + 5 4599

NOTA : Devemos fazer êstes cálculos mental-
mente .

B) Adição de grupos

Quando necessitamos somar 15 ou mais números,
é muito prático passarmos um traço em baixo da cada
cinco parcelas e determinarmos o total de cada gru-
po. A soma dos sub-totais, fornecerá o total dese-
jado.

Quando tiver 17 parcelas, por exemplo,consi-
derar um grupo de 7 parcelas e dois de cinco parce-
las .

EXERCÍCIOS

1- Determine o número de vêzes que o algarismo ... parece na sucessão natural dos números intei... até mil (1000).

2- Por que principiar a adição pela direita ? ... que caso podemos começar por uma coluna ... quer ?

3- Utilizar as propriedades associativa e comu... tiva, para calcular mentalmente as somas : 16 + 12 + 8 + 14 . 9 + 3 + 1 + 7

4- Ache as somas horizontais e total dos númer...

a)
49850
17370
68429
23156
21017
67154
64353

b)
6542
63834
76343
80931
79883
83578
35647

c)
62165 ....
16732 ....
85696 ....
71883 ....
56149 ....
31572 ....
76844 ....

Soma total:

5- Faça as seguintes adições :

a) 734
+245

b) 135
241
422
+101

c) 748
546
+234

d) 3...
...
763...
5...
+ ...

e) 5308
1010
2598
213
+ 4150

6- Determine os motivos, que levaram um aluno ... rar as seguintes adições :

a) 48
+53
102

b) 945
876
+327
2038

c) 78
+56
161

d) 2348
7256
+3148
13752

7- Conte : de 2 em 2 até 20 ; de 3 em 3 até ... de 4 em 4 até 40; de 5 em 5 até 50; de 6 em ... até 60; de 7 em 7 até 70; de 8 em 8 até 80; ... 9 em 9 até 90; de 10 em 10 até 100 .

8- Escrever e somar as quantidades seguintes ... nidades de terceira ordem, 2 de segunda e ...

primeira ; 7 de quarta ordem, 15 de primeira ; 14 de quarta ordem, 158 de primeira .

9- Transformar a soma 10 + 8, em uma soma equivalente de 4 parcelas. Que propriedade aplica-se?

10- Efetuar as operações seguintes :
a) 7 + (4 + 2)
b) (5 + 2) + (3 + 4)
c) 5 + (3 + 2 + 5) + (7 + 3)
d) 12 + 7 + (2 + 4)

11- A menor de quatro cordas que tem 29 metros e as seguintes 2 metros a mais que a precedente. Qual a soma dos comprimentos ?

12- Achar a idade de um pai que tem 15 anos mais do que a soma das idades de 4 filhos que têm: 4ºf. : três anos; o 3º filho, 1 ano mais que o 4º; o 2º f. três anos mais que o terceiro e o 1ºf. tanto quanto os outros juntos .

13- Que alteração sofre a soma de duas parcelas se uma delas aumenta de 3 dezenas e a outra de 7 unidades ?

14- Em uma soma de três números, adicionando-se 8 unidades a cada um dêles, que alteração sofre a soma ?

15- A soma de vários números naturais é igual ao número de parcelas. Qual é o valor de cada parcela ?

16- Somando-se um certo número a um outro, obtem-se como soma êste outro ?Qual foi o número somado?

17- Usando a propriedade comutativa, de quantos modos se pode somar os números 5, 7, 8 e 9 ?

18- Dizer se é indiferente começar as seguintes operações, pela direita ou pela esquerda e justificar :

3251
4623
+2110

5432
3263
+1107

2031
1432
+5325

3261
7534
+8372

19- A soma de três números é igual ao maior número de 5 algarismos diferentes. Adicionando-se a cada um dos números, o maior de três algarismos, qual será a nova soma ?

20- A soma de dois números é o sêxtuplo do menor. O que é o maior do menor ?

IV - O P E R A Ç Õ E S

S U B T R A Ç Ã O

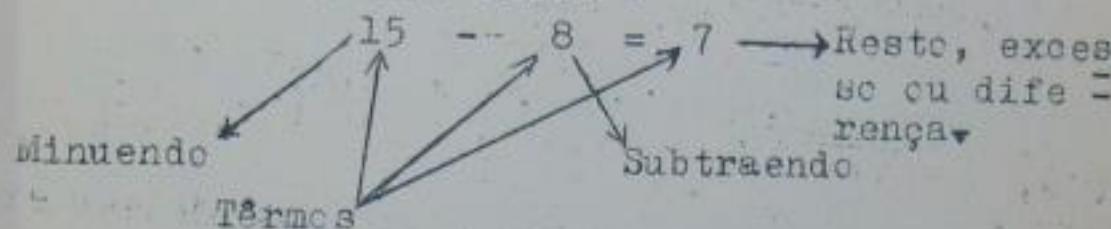
1- Definição

Admitamos que abrindo um livro, encontremos a seguinte adição : 8 + ● = 15 ⟶ Soma ou total

parcelas

Conhecemos uma parcela e o total e não sabemos o valor da outra parcela. Faríamos possìvelmente a seguinte pergunta : Qual o número que devemos somar a oito, para obtermos 15 ?

Necessitamos resolver êste problema. Criaremos então uma nova operação, chamada: Subtração.

Escreveremos assim :

Devemos lêr : Quinze menos oito é igual a sete.

Podemos portanto, enunciar a seguinte definição :

SUBTRAÇÃO é a operação que tem por objetivo, dados a soma de dois números e um dêles, determinar o outro .

De acôrdo com a própria definição, podemos concluir que a subtração só é possível no campo dos números naturais, quando o minuendo (nº maior) é maior que o subtraendo (nº menor) .O minuendo , exerce sempre o papel passivo e o subtraendo o papel ativo .

2- Símbolo

Para indicar a diferença, utiliza-se o si

nal - (menos), colocado entre o minuendo e o
traendo.

3- Propriedades

a) FUNDAMENTAL : O minuendo é igual ao sub
endo mais o resto :
Temos : 12 - 8 = 4

12- Minuendo
8- Subtraendo
4- Resto

De acordo com a própria definição de
tração, podemos escrever :

12 = 8 + 4

| M = S + R |

b) UNÍVOCA OU UNIFORME : A diferença de do
meros é sempre única e bem determinada .
7 - 4 = 7 - 4

c) MODULAR : O módulo da subtração é o zer
pois, qualquer número diminuido de zero, não se
tera .
11 - 0 = 11

d) O RESTO VARIA NO MESMO SENTIDO DO MINUE
Consideremos duas partes .

1- Adicionando-se uma certa quantidade
minuendo, o resto ficará acrescido da mesma qua
dade . Ex : 18 - 11 = 7
Somar(4) 22 - 11 = 11 = 7 +

2- Subtraindo-se do minuendo uma
quantidade, o resto ficará diminuido da mesma
tidade. Ex : 22 - 13 = 9
Subtrair(5) 17 - 13 = 4 = 9 -

e) O RESTO VARIA EM SENTIDO CONTRÁRIO AO
SUBTRAENDO .

Consideremos duas partes :

1- Adicionando-se ao subtraendo uma

quantidade, o resto ficará diminuido da mesma quantidade . Ex : 18 - 12 = 6
Somar(3) 18 - 15 = 3 = 6 - 3

2- Subtraindo-se do subtraendo uma certa quantidade, o resto ficará aumentado da mesma quantidade . Ex : 22 - 9 = 13
Subtrair(4) 22 - 5 = 17 = 13- 4

Observe e procure compreender muito bem essas propriedades .

f) PARA DE UM NÚMERO TIRARMOS UMA SOMA INDICADA devemos subtrair do número sucessivamente cada parcela da soma indicada .
Ex : 30 - (4 + 5 + 7) = 30 - 16 = 14
ou 30 - 4 - 5 - 7 = 14
Logo : 30 - (4 + 5 + 7) = 30 - 4 - 5 - 7

g) PARA SUBTRAIR DE UM NÚMERO, UMA DIFERENÇA INDICADA , basta subtrair do número o minuendo e ao resultado, somar o subtraendo.
Ex: 11 - (5 - 3) = 11 - 2 = 9
ou 11 - 5 + 3 = 9 Mesmo resultado,
logo; 11 - (5 - 3) = 11 - 5 + 3

Para que você possa melhor compreender esta propriedade, vejamos um exemplo prático ;
Paulo possue Cr$ 11,00 na carteira, mas deve a Pedro Cr$ 5.00, e, tem de receber de Fábio c$3,00
Êles podem proceder dos seguintes modos:

1º- Fábio paga a Pedro. A dívida de Paulo passa a ser menor . Temos : 11 - (5 - 3)= 9
2º- Paulo paga a Pedro os Cr$5,00 e recebe de Fábio os Cr$ 3,00.Temos :(11- 5) + 3 = 9

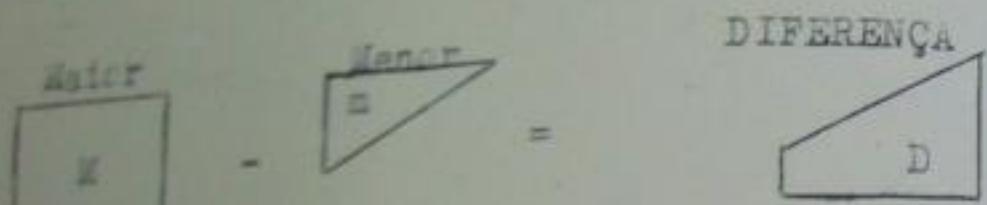
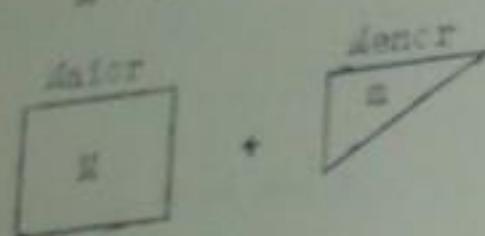
Comparando os dois resultados, podemos concluir : 11 - (5 - 3) = 11 - 5 + 3

4- <u>Determinar dois números, conhecendo-se a s</u>
<u>e a diferença dos mesmos</u> .

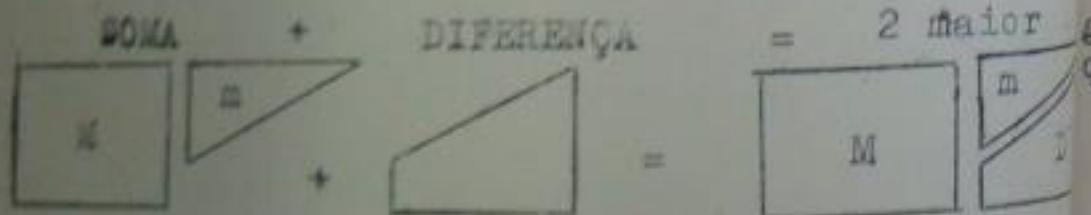
Temos : Um número é maior do que o
tro, logo : M = maior m= menor S=soma D= dif
ça

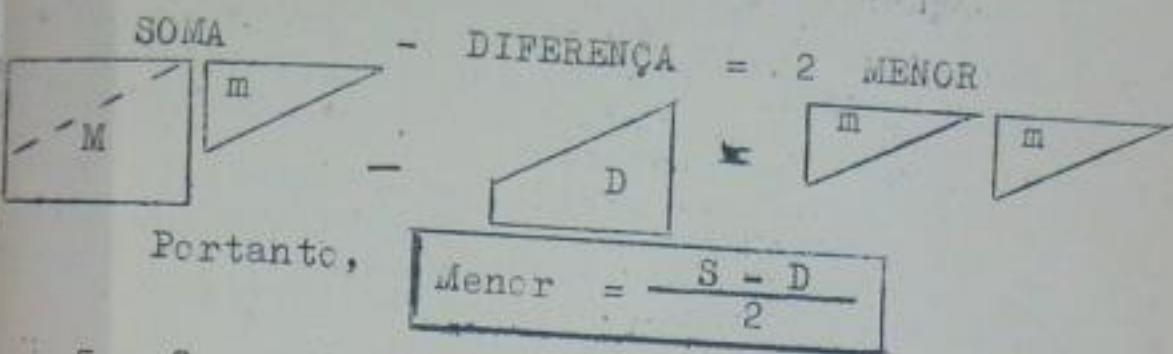
Vamos representar pelas inici
para facilitar o nosso racioc

$M + m = S$

$M - m = D$

a) <u>Determinação do maior</u>

Se adicionarmos à soma dos dois número
diferença, ficaremos com o dôbro do maior .

Isto é lógico, porque o menor recebe
falta para ser igual ao maior

Portanto, $\text{Maior} = \dfrac{S + D}{2}$

b) Se subtrairmos da soma de dois números a diferença, obteremos o dôbro do menor.

Portanto, $\boxed{\text{Menor} = \dfrac{S - D}{2}}$

5- <u>Casos de subtração</u>

a) O subtraendo tem apenas um algarismo .

Ex :
$$\begin{array}{r} 18 \\ \underline{-5} \\ 13 \end{array}$$

b) Subtrair dois números, quando cada algarismo do subtraendo tem valor absoluto menor do que o seu correspondente no minuendo .

<u>REGRA</u>

1- Escreve-se o subtraendo debaixo do minuendo, de modo que as unidades da mesma ordem se correspondam .
2- Passa-se um traço por baixo do subtraendo e tiram-se as unidades das unidades , as dezenas das dezenas, as centenas das centenas , etc .

Ex :

7856	Minuendo
-3435	Subtraendo
4421	Diferença

c) Subtrair dois números, quando um ou alguns algarismos do subtraendo, têm um valor maior do que os correspondentes do minuendo .

<u>REGRA</u>

Numa subtração, quando um algarismo do subtraendo é de maior valor do que o correspondente do minuendo, aumenta-se êste de dez unidades da ordem que êle está representando

ao número e se acrescenta uma unidade a
lor do algarismo do subtraendo, colocado
esquerda do que está sendo considerado.

Ex : 8352 Observamos que de duas un
-5876 des não podemos subtrair
nidades ; então, acrescen
se ao valor do 7 no subtraendo .

Fazemos isso porque, adicionamos 10
dades ou uma dezena ao minuendo e para que a
rença não se altere, necessitamos adicionar a m
quantidade ao subtraendo. Utilizamos a proprie
que diz :" Adicionando-se ao minuendo e ao sub
endo uma mesma quantidade, o resto não se alter

Continuando-se com o mesmo raciocíni
contramos que a diferença entre os números é: 2

6- Provas

a) Sabemos : o minuendo é igual ao
traendo mais o resto. Logo, para verificar se
subtração está certa, basta adicionar o subtra
ao resto. O resultado deve ser igual ao minuend

Ex : 7543 Minuendo
-2385 Subtraendo
5158 Resto
7543 Soma (S + R) = M

b) Se o minuendo é igual ao subtrae
mais o resto, então, o subtraendo pode ser obt
- Subtraindo o valor do resto, do
endo .

Ex : 5436 Minuendo
-1384 Subtraendo
4052 Resto
1384 Diferença (M - R) =

7- Complemento aritmético

Complemento aritmético de um número, é o
falta para a unidade de ordem imediatamente

perior à mais elevada que nêle figura .

Ex : a) O complemento aritmético de 7 é 3 , porque : 10 - 7 = 3

b) O complemento aritmético de 83 é 17, porque : 100 - 83 = 17

c) O complemento aritmético de 658 é 342 , porque : 1000 - 658 = 342

Em afce das propriedades da subtração, podemos adotar a seguinte regra prática .

Para determinar o complemento aritmético de um número, subtrai-se de nove o valor de cada um dos algarismos, a partir da esquerda, exceto o valor do último algarismo significativo, que se subtrai de dez .

Ex :

```
 9910        99910
 -784       -27380
  216        72620
```

d) Cálculo das expressões :

Ex : 812 - 56 + 49 + 12 - 75 + 8 - 175 - 8

Podemos calcular o valor desta expressão, determinando a diferença entre a soma dos aditivos, e a soma dos subtrativos, ou utilizando os complementos .

1- Aditivos / Subtrativos

```
 Aditivos          Subtrativos
   812                 56
    49                 75
    12                175
  +  8               +  8
   881      -         314  = 567
```

881 - 314 = 567

2- Temos : 812 - 56 + 49 + 12 - 75 + 8 - 175 -
- 8 = 100 + 44 + 49 + 12 -200-25
+ 8 - 1000 + 825 - 10 + 2 = ?

Para calcular a expressão dada, utiliza-

... os complementos.

Dispomos os têrmos um em baixo do outro, substituindo os subtrativos pelos seus respectivos complementos, precedidos por um ponto.

Vejamos como devemos proceder:

```
  812
  .44
   49
   12
  .25
    8
 .825
   .2
  ---
  567
```

<u>1ª coluna</u> : (ordem das unidades)
2, 6, 15, 17, 22, 30, 35, 37, vão 3.

<u>2ª coluna</u> : (ordem das dezenas)
3, 4, 8, 12, 13, 15, 17, tira um, 16, vai 1

<u>3ª coluna</u> : (ordem das centenas)
1, 9, tira um, 8, tira um, 7, 15. Vai 1.

<u>4ª coluna</u> : (ordem das unidades de milhar)
1, tira um, zero.

Portanto, tôda vez que encontrarmos <u>ponto</u>, subtrai-se (tira-se) <u>uma unidade</u>.

EXERCÍCIOS

1- Que mudança sofre o resto de uma subtração
   a) quando se acrescenta ou quando se subtra[i] ma certa quantidade ao minuendo?
   b) quando se acrescenta ou quando se subtr[ai] certa quantidade ao subtraendo?

2- Que mudança sofre o resto de uma subtração, os dois têrmos são aumentados ou diminuídos uma mesma quantidade?

3- Numa subtração acrescentou-se 12 ao minuend[o] se subtraiu 7 ao subtraendo; que mudança [so]freu o resto?

4- Quando se acrescenta 9 ao subtraendo e se [sub]trai 24 ao minuendo, que mudança sofre o re[sto]

5- Que se obtém numa subtração:
   a) quando do minuendo se subtrai a diferença
   b) quando ao subtraendo se acrescenta a dif[eren]ça?
   c) quando à soma do minuendo e do subtraend[o se] acrescenta a diferença?

6- Que resultado se obtém:
   a) subtraindo-se a soma de dois números, do dôbro do maior?
   b) subtraindo-se da soma de dois números, o dôbro do número menor?

7- Se numa subtração somarmos meia centena ao minuendo e meio milhar ao subtraendo, o que acontecerá ao resto?

8- Se somarmos 4 unidades de quarta ordem ao minuendo, e subtrairmos 2 unidades de terceira ordem ao subtraendo, o que acontecerá ao resto?

9- Calcular os complementos aritméticos dos seguintes números: 8, 26, 38, 102, 349, 2576, 347, 843, 5648, 734, 911, 11, 777, 111, 9682, 13.

10- Resolver as seguintes expressões, utilizando os dois processos ensinados:
   a) 18 - 5 + 19 + 13 - 512 + 918 - 17 = ? (R: 434)
   b) 212 - 15 + 3 - 7 + 614 - 239 - 6 = ? (R: 562)
   c) 78 - 216 + 419 - 28 + 104 - 74 = ? (R: 283)

11- Se o complemento aritmético de um número compreendido entre 300 e 400 é 622, qual é êsse número?

12- Efetuar as seguintes subtrações:

```
 712     578     876     21307
-201    -349    -597     -8896
```

13- Por que a subtração começa pela direita? Em que caso é indiferente começar a subtração por qualquer coluna?

14- Se do minuendo se subtrai a diferença e do resultado se subtrai o subtraendo, o que se obtem?

15- A diferença de dois números é <u>8</u> e o maior excede a diferença de 12. Achar o maior.

16- Efetuar, aplicando as propriedades da subtração
   (7 + 6 + 4) + 8 - 7
   (7 - 5) + (13 - 4) - (17 + 3) + (18 - 9)
   450 - {[6 + 4 - (3 - 1)]}
   [8 + (4 - 2)] + [9 - (3 + 1)]

17- Um número é o quádruplo do outro e a diferença entre êles é 27. Quais são os números?

19- A soma de dois números é o quádruplo do menor e

19- ... a diferença entre êles é igual a 10. Quais são os números ?

20- A soma do minuendo e subtraendo é 308. O re[sto] é igual a 92. Qual é o valor do subtraendo ?

21- A soma de dois números é 2048. A soma dos d[ois] primeiros é 1368, e a soma dos dois últimos é 1228. Quais são êsses números ?

22- Um número é o quíntuplo do outro ; sabendo-se que a diferença entre êles é 28. Determine ...

23- Um número é o quádruplo de outro. O que é o ... do maior ? O que é a soma do menor ? O ... é a diferença do menor ? O que é a soma ... maior ? O que é a diferença do maior ? Faça as representações simbólicas.

24- Recorde tudo que você estudou até agora, an[tes] de ler o capítulo seguinte.

§§§§§§§§§§§§§§

V - O P E R A Ç Õ E S

M U L T I P L I C A Ç Ã O

1- Definição

MULTIPLICAÇÃO é a operação que tem por objetivo, determinar uma soma de tantas parcelas iguais a um número (multiplicando), quantas são as unidades de outro (multiplicador).

Ex :

7 + 7 + 7 = 21 ← Soma ou total

Parcelas

3 nº de parcelas

2- Símbolo

Poderemos utilizar os seguintes sinais : (x) ou (.)

3- Propriedades

a) UNÍVOCA OU UNIFORME : significa que o produto de dois números é único e bem determinado .

Ex : 8 x 3 = 8 x 3

b) MODULAR : o valor de um número não se altera, quando é multiplicado por 1 (um) O 1 é considerado o módulo da multiplicação .

Ex : 12 x 1 = 12

← Módulo

c) ANULAMENTO : qualquer quantidade multiplicada por zero (0) é igual a zero .

Ex : 5 x 0 = 0

Interpretemos êsse resultado :

1- Admitamos inicialmente, que seja 5 o multipl dor e 0 o multiplicando, então :
5 x 0 é uma soma de cinco parcelas iguais
Temos :

$$\underbrace{0 + 0 + 0 + 0 + 0}_{5} = 0$$

2- No caso de 0 ser o multiplicador, então : 5 significa uma soma sem parcelas, isto é, nul

d) COMUTATIVA : A ordem dos fatôres n tera o produto.

Ex : $3 \times 5 \times 8 = 8 \times 3 \times 5 = 8 \times 5 \times$
$= 3 \times 8 \times 5 = 5 \times 3 \times 8 = 5 \times 8 \times$

e) ASSOCIATIVA : Podemos substituir ou mais fatôres pelo produto efetuado, e a ope não se altera.

Ex : $5 \times 8 \times 7 \quad 3 \times 9 =$
$= 40 \times 7 \times 27 = 40 \times 63 \times 3 =$
$= 5 \times 168 \times 9$

f) DISSOCIATIVA : Podemos substituir quer fator por dois ou mais, que multiplicados reproduza.

Ex : $16 \times 15 \times 20 =$

$$= \underbrace{(8 \times 2)}_{16} \times \underbrace{(3 \times 5)}_{15} \times \underbrace{(2 \times 10)}_{20}$$

g) DISTRIBUTIVA EM RELAÇÃO À ADIÇÃO : multiplicar um número por uma soma indicada, m plica-se o número por cada parcela da soma e s -se os produtos obtidos.

Ex : $5 (7 + 8) = 5 \times 15) = 75$

$5 \times 7 + 5 \times 8 = 35 + 40 = 75$
vemos o mesmo resultado, portanto :

$$5 (7 + 8) = 5 \times 7 + 5 \times 8$$

h) DISTRIBUTIVA EM RELAÇÃO À SUBTRAÇ Para multiplicar um número por uma diferença i da, multiplica-se o número por cada têrmo da d rença e se subtraem os resultados obtidos.

Ex : $8 (12 - 3) = 8 \times 9 = 72$ ou :
$8 \times 12 - 8 \times 3 = 96 - 24 = 72$. Obtivemos o mesmo resultado, logo :

$$8 (12 - 3) = 8 \times 12 - 8 \times 3$$

i) PARA MULTIPLICAR UM NÚMERO POR UM PRODUTO INDICADO : basta multiplicar o número por um dos fatôres do produto .

Ex : $8 (3 \times 5 \times 7) = 24 \times 5 \times 7 =$
$3 \times 40 \times 7 = 3 \times 5 \times 56$

j) O PRODUTO VARIA NO MESMO SENTIDO DOS FATÔRES .

Ex : 1-
$7 \times 3 = 21$
Somar (3) $= 10 \times 3 = 30$ Observamos que o produto aumentou .

2-
$8 \times 12 = 96$
Subtrair(5) $= 8 \times 7 = 56$. O produto diminuiu .

l) O PRODUTO DE DUAS SOMAS INDICADAS : obtem-se, multiplicando-se cada parcela da primeira , por tôdas as parcelas da segunda e somam-se os resultados .

Ex : $(8 + 7) (5 + 2) = 15 \times 7 = 105$ ou

$$= \underbrace{8 \times 5}_{40} + \underbrace{8 \times 2}_{16} + \underbrace{7 \times 5}_{35} + \underbrace{7 \times 2}_{14} = 105$$

Portanto, podemos escrever :

$$(8 + 7) (5 + 2) = 8 \times 5 + 8 \times 2 + 7 \times 5 + 7 \times 2$$

4- Casos de multiplicação

a) NÚMERO SIMPLES x NÚMERO SIMPLES .
Nêste caso, basta aprender muito bem as

100 combinações fundamentais . Para isso constr
mos a tabuada de Pitágoras . Vejamos :

TABUADA DE PITÁGORAS

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Forma-se a primeira coluna da esquer
escrevendo-se os nove primeiros números .

Forma-se a segunda coluna, somando-s
cada número da primeira a si mesmo, o que dá o p
to dos primeiros nove números por 2.

Forma-se a terceira coluna, somando-
cada número da primeira ao seu correspondente
gunda, o que dá o produto da cada um dos prime
9 números por 3.

De um modo geral, forma-se uma colu
qualquer, somando-se cada número da primeira c
a seu correspondente, na coluna que precede a
se quer formar .

-Para determinar o produto de 3 x 5,
curamos o 3 na primeira linha e o 5 na primeir
luna . A coluna e a linha que contêm êsses nú
interceptam-se num ponto, que nos fornece o pr
15 .

```
        5
        :
3 ......:←15
```


b) NÚMERO COMPOSTO x NÚMERO SIMPLES

Ex:
```
     742
     x 4
28c 16d 8u
```
ou
```
 742
 x 2
2968
```

c) NÚMERO COMPOSTO x NÚMERO COMPOSTO

Ex :
```
  548
  x25
 2740
1096
13700
```

REGRA :

1º- Escreve-se o multiplicador por baixo do multiplicando.

2º- Começa-se pela direita, multiplicando o valor de cada algarismo do multiplicador, por todos do multiplicando e escrevendo o algarismo da direita da cada produto parcial, na mesma coluna vertical .

3º- A soma dos produtos parciais, será o produto procurado (total).

5- Provas

Aplicamos a propriedade comutativa, para verificar se um produto está certo .

6- Cálculo rápido

a) MULTIPLICAÇÃO POR 5

1- Quando o número é par : Se o número é par, divida-o por 2 e depois, coloque um zero à direita .

Ex :

8 x 5 = 8 : 2 x 10= 4 x 10= 40

174 x 5 = 174: 2 x 10= 87 x 10=870

2- Quando o número é ímpar; Se o número é ímpar, faça a divisão aproximada por 2 e depois acrescente um 5 .

Ex: 7 x 5 = 35   7 : 2 ≅ 3 à direita de 3, escreve-se agora 5 = 35

b) MULTIPLICAÇÃO POR 9

Acrescente um zero à direita do outro fator e subtraia do número assim formado, o

valor dêsse outro fatôr .

Ex: 7 x 9 = 70 - 7 = 63
58 x 9 = 580 - 58 = 522
675 x 9 = 6750 - 675 = 6075

MULTIPLICAÇÃO POR 99, 999, 9999, etc

Ex : 78 x 99 = 7800 - 78 = 77[illegible]
78 x 999 = 78000 - 78 = 77[illegible]

REGRA : Acrescenta-se ao multiplicand[o] tos zeros quantos são os noves do mu[lti]plicador e se subtrai do número assi[m for]mado, o próprio multiplicando .

c) MULTIPLICAÇÃO POR 11

REGRA : Para multiplicar qualquer número por [11] começa-se por escrever seu último alg[arism]o à direita. Em seguida, somam-se os [valo]res dos algarismos 2 a 2 , até o últ[imo,] que se soma com as unidades que vêm d[o an]terior.

- Se a soma fôr inferior a 10, escreve-[se] seu resultado tal qual.
- Se fôr superior a 10, escreve-se some[nte o] algarismo das unidades e acrescenta-se [a] dezena, à soma seguinte .

Ex : 1- Seja multiplicar 53 por 11 .
Eis como fazer :
a)- Escreve-se o 3 .
b)- Some 5 + 3 = 8. Escreva o 8 [à es]querda do 3 .
c)- Escreva o 5 à esquerda do númer[o] formado. Assim :

53 x 11 = 5[illegible]

2- Seja multiplicar 96 x 11 .
a)- Escreva o 6 .
b)- Soma 9 + 6 = 15 . Escreva o 5 à [es]querda do 6 . Vai um
c)- 9 + 1 = 10. Escreva o 10 à esquer[da do]

número já formado.
Assim :

96 x 11 = 1056

3- Seja multiplicar 7856 x 11 .
a)- Escreva o 6 .
b)- 6 + 5 = 11. Escreva o 1 à esquerda do 6. Vai um .
c)- 5 + 1 + 8 = 14 . Escreva o 4 à esquerda do número formado (16). Teremos 416 . Vai um .
d)- 8 + 7 + 1 (que vem daqui) = 16
Escreva o 6 à esquerda de 416. Teremos : 6416. Vai um .
e)- 7 + 1 = 8 . Escreva o 8 à esquerda do número 6416, já formado. Teremos : 86416 , que é o produto de : 7856 por 11 .

d) MULTIPLICAÇÃO DE DOIS NÚMEROS, COMPOSTOS DE DOIS ALGARISMOS .

Ex :

```
  46
x 52
2392
```

1º algarismo : 2 x 6 = 12
Escrevemos o 2 e vai 1 .

2º algarismo :
(2 x 4) + (5 x 6) + 1 =
= 8 + 30 + 1 = 39 . Escrevemos o 9 e vão 3.

3º e 4º algarismo :
(5 x 4) + 3 (que vem) =
=20 + 3 = 23 , que escrevemos tal qual, por ser o último produto parcial .

EXERCÍCIOS

1- Efetuar os seguintes produtos :

		Resp:
61483	x 6	368898
12375	x 5	61875
4836	x 47	227292

Resp: 801222
868250
17890276

100   5257 x 246
3875 x 302
17829 x 1004

2- Como se pode, com uma só multiplicação, obt... soma dos produtos : 6 x 5   3 x 5   e   7 x ...

3- Como se pode obter com uma única multiplica... a diferença dos produtos : 5 x 7   e 5 x 4

4- Que mudança experimenta um produto :
a) quando êle se introduz um ou mais fatôr...
b) quando se multiplica dois de seus fatôre... por 7 ?
c) quando se multiplica cada um dos fatôres, ... um mesmo número ?

5- Achar o produto de 25 por 9, 11, 99 e 101, ... efetuar diretamente a multiplicação .

6- Se multiplicarmos um número por 5, êle aume... de quanto em relação a si mesmo ?

7- Mostrar que : - Adicionando-se um determina... número a um dos fatôres (multiplicando ou m... plicador), o produto fica acrescido de tan... vêzes o outro fator, quantas são as unidade... quêle número .

Solução :

M x M = P   (1)

Adicionemos (4)

Fica : (M + 4) x m = Aplicando a ... priedade distributiva em relação à adição...

= M x m + 4 m =

Como êste têrmo acima, é igual a P, podem... crever : P + 4m (2)

Comparando as igualdades (1) e (2), podemos ... rificar que, quando adicionamos 4 unidades ... multiplicando, o produto ficou acrescido de... vêzes o multiplicador. Se tivéssemos adicio... ao multiplicador as 4 unidades, o produto ... aumentado de uma quantidade igual a 4 vêzes ... multiplicando .

Numa multiplicação, o multiplicando é 430. ... subtrairmos 3 unidades do multiplicador, de... tas unidades diminuirá o produto ?

Substituir o produto indicado:15 x 8 x 5 x ... por outro equivalente e que contenha sòment... fatôres. Dizer qual a propriedade empregada

10- Substituir o produto indicado : 12 x 5 x 72 por outro equivalente e que contenha quatro fatôres
Enunciar a propriedade usada .

11- Têm o mesmo número de letras, uma página de 38 linhas de 60 letras cada linha e outra de 60 linhas de 38 letras cada linha. Por que ?

12- A soma de dois números é 15. Multiplicando êsse número por 4, o que acontece com a soma ?

13- Aplicar a propriedade distributiva as cálculo das seguintes expressões :
a) 7 (18 + 3)
b) (9 + 6) x (3 + 2)
c) (7 + 11 - 6) x 5

14- O produto de dois números é 96. Qual é o produto de um número cinco (5) vêzes maior do que o primeiro, por outro número 5 vêzes maior do que o segundo ?

15- Uma pessoa efetuou a multiplicação 231 x 108 e escreveu o segundo produto sob o primeiro, deslocando-o para a esquerda uma única ordem. Determinar o êrro, sem refazer a operação .

§§§§§§§§§§§

DIVISÃO

1- Origem

Os babilônios e indús, foram os primeiros em conhecer a divisão. Os métodos atuais para resolver a divisão, se derivam dos indús, que dispunham sôbre a areia, os elementos da operação :

Dividendo, divisor, quociente e resto. Êstes conhecimentos fôram transmitidos à Europa, pelos árabes .

2- Definição

Admitamos que você abrindo um livro , encontrasse o seguinte produto :

Possìvelmente, você faria a seguinte pergunta : -Por qual número devo multiplicar 9 , para obter 45 ?

Para resolver êsse problema, surgiu uma nova operação, chamada : divisão .

O produto recebe o nome de :dividendo, o fator conhecido de: divisor e o fator procurado : quociente .

Podemos então enunciar a seguinte definição :

DIVISÃO é a operação que tem por objetivo, dados o produto de dois números e um dêles, determinar o outro .

Poderemos também desejar saber, quantas vêzes um número contém outro. Nêste caso, poderemos admitir duas hipóteses :

1ª) O número contém outro, um número inte... de vêzes.

Ex :
Dividendo → 45 |9 ← Divisor
Resto → 0   5 ← Quociente

Neste caso, diremos que a divisão é **Exata**.

2ª) O número não contém outro um número inteiro de vêzes.

Ex :
Dividendo → 47 |9 ← Divisor
Resto → 2   5 ← Quociente

Neste caso, a divisão é dita : Aproxi... da.

Símbolo

Poderemos usar os seguintes sinais :

: ÷ —

: $8 \div 4$ ou $8 : 4$ ou $\frac{8}{4}$

...tureza do quociente

Quando o dividendo e o divisor fôrem núme... concretos da mesma natureza, o quociente ...rá um número abstrato.

Ex: Com 52 laranjas, quantos grupos de ... laranjas, poderemos fazer ?

52 laranjas |4 laranjas
12 13
0

Resposta : 13 grupos

Quando o divisor fôr um número abstrato, ... quociente será da mesma natureza do divi... ...o.

Ex : Desejamos distribuir 52 laranjas ... 4 meninos. Quantas laranjas recebe c... um ?

52 laranjas |4
12   13 laranjas
0

5- Propriedades

a- FUNDAMENTAL

1º- Divisão exata

58 |8
0 7

Podemos escrever :
$56 = 8 \times 7$

Dividendo = Divisor x Quociente ou simbòlicamente : $D = d \times q$

Portanto, na divisão exata : O dividendo é igual ao produto do divisor pelo quociente .

2º- Divisão aproximada

75 |9
3 8

Podemos escrever :
$75 = 9 \times 8 + 3$

Dividendo = Divisor x Quociente + Resto

Ou simbòlicamente : $D = d \times q + r$

Portanto, na divisão aproximada : O dividendo é igual ao produto do divisor pelo quociente , mais o resto .

b- UNÍVOCA OU UNIFORME

Significa que o quociente de dois números é sempre único e bem determinado .

Ex : $8 : 2 = 8 : 2$

c- MODULAR

Qualquer quantidade dividida pela unidade, é igual a ela mesma .

Ex : $12 : 1 = 12$ O 1 (um) é considerado o módulo da divisão .

d- DISTRIBUTIVA EM RELAÇÃO À ADIÇÃO

Para dividir uma soma indicada por um número, divide-se cada parcela da soma por

êsse número e somam-se os quocientes obtidos .

Ex : (35 + 14) : 7 = 49 : 7 = 7

de acôrdo com a propriedade enunciada :

35 : 7 + 14 : 7 = 5 + 2 = 7

Obtivemos o mesmo resultado, logo :

(35 + 14) : 7 = 35 : 7 + 14 : 7

e- DISTRIBUTIVA EM RELAÇÃO À SUBTRAÇÃO

Para dividir uma diferença indicada [illegible] um número, divide-se cada têrmo da diferença, [illegible] êsse número e subtraem-se os quocientes obtidos

Ex : (40 - 16) : 8 = 24 : 8 = 3

Aplicando a propriedade enunciada, [illegible]

40 : 8 - 16 : 8 = 5 - 2 = 3

Mesmo resultado, logo :

(40 - 16) : 8 = 40 : 8 - 16 : 8

f- O QUOCIENTE VARIA NA RAZÃO DIRETA DO DIVIDENDO .

1) Isto significa que, quando multipli[illegible] -se o dividendo por uma certa quantidade, o qu[illegible] fica multiplicado pela mesma quantidade .

Ex : 42 |7

0 6 Multipliquemos o divid[illegible] por 2 e teremos :

84 |7

14 12 = 6 x 2

0

Observamos que o quociente ficou ta[illegible] multiplicado por 2 .

2) Dividindo-se o dividendo por uma ce[illegible] quantidade, o quociente ficará dividido pela [illegible] quantidade .

Ex : 42 |7

0 6

Dividindo-se o dividendo por 2, temos :

21 |7

0 3 = 6 : 2

Logo, o quociente também ficou dividido por 2 .

g- O QUOCIENTE VARIA NA RAZÃO INVERSA DO DIVISOR .

1) Multiplicando-se o divisor por uma certa quantidade, o quociente ficará evidentemente, dividido pela mesma quantidade .

Ex : 32 |8

0 4

Multiplicando-se o divisor por 2, temos

32 |16

0 2 4 : 2

Portanto, o quociente ficou dividido por 2, como queríamos m trar .

2) Dividindo-se o divisor por uma certa quantidade, o quociente ficará multiplicado pela mesma quantidade .

Ex : 32 |8

0 4

Dividindo-se o divisor por 2 , temos :

32 |4

0 8 = 4 x 2

Observamos que o quociente ficou multi - plicado por 2 .

h- PARA DIVIDIR UM PRODUTO POR UM NÚMERO , basta dividir um dos fatôres por êsse número, multiplicar o quociente dessa divisão por um segundo fator .

O produto assim obtido por um ter
e, assim sucessivamente até o último fator

Ex : (32 x 24 x 40) : 8 =

= 4 x 24 x 40 = (Dividimos o 32 por 8

= 32 x 3 x 40 = (Dividimos o 24 por 8

= 32 x 24 x 5 = (Dividimos o 40 por 8

- PARA DIVIDIR UM NÚMERO POR UM PRODUT

Pode-se dividir êsse número pelo pr
ro fator, o resultado pelo segundo e assim su
vamente, até o último fator.

Ex : 840 : (5 x 8 x 7) =

= 168 : (8 x 7) =

= 21 : 7 = 3

6 - REGRAS PARA DIVIDIR

1º) Coloca-se o divisor à direita do di
do, separando-se por meio de uma linha vertic
ça-se depois outra horizontal, debaixo do div

2º) Começando pela esquerda do dividend
termina-se as vêzes que o divisor está conti
menor número de algarismos (possível) do d
do e escreve-se o resultado como primeiro alg
no quociente, debaixo do primeiro algarismo
visor.

3º) Multiplica-se o divisor pelo valor
algarismo achado ; o produto coloca-se debai
dividendo parcial utilizado e subtrai-se dêle
direita do resto, coloca-se o algarismo segui
dividendo, e o número assim formado, ou novo d
dendo parcial ; divide-se pelo divisor, como
so anterior, continuando a operação do mesmo
até que se tenha usado todos os algarismos do
dendo.

4º) Se algum dividendo parcial não con

o divisor, isto é, fôr menor que êste, coloca-se um zero no quociente e baixa-se o algarismo seguinte do dividendo, continuando a divisão do modo já explicado.

NOTA : Quando o divisor e o quociente têm um só algarismo, basta procurar na tabuada de Pitágoras, o maior múltiplo do divisor, contido no dividendo.

O número pelo qual é precedido, multiplicar o divisor, para ter êste múltiplo, que é o " quociente ".

Ex : Seja dividir : 43 por 5 , Na tabuada temos : 5 x 8 = 40   5 x 9 = 45

Portanto, 8 é o quociente.

7- Casos de divisão

a) Combinações simples

1-) Número par, inferior a 10, dividido por 2.

Ex : 8 |2
0 4

2-) Número ímpar, inferior a 10, dividido por 2.

Ex : 9 |2 ← Divisor
Dividendo 1 4 ← Quociente
Resto

3-) O número é dividido por êle mesmo.

Ex : 5 |5
0 1

4-) Os produtos da tabuada de Pitágoras, são apresentados sob a forma própria do cálculo escrito

Ex : 24 |6
0 4

b) O divisor tem um só algarismo

1-) Operação apresentando, ao primeiro ensaio, uma estimação fácil e exata, sôbre um só algarismo

do dividendo, os restos são nulos .

```
Ex :   9 3 6  |3
       0 3     3 1 2
         - 6
           0
```

2-) Mesma operação, mas, a estimação se faz só[bre] dois algarismos do dividendo .

```
Ex :   1 2'8 4  |4
         0 8     321
           - 4
             0
```

3-) As subtrações conduzem a restos parciais, [aos] quais se anexam os algarismos abaixados .

```
Ex :   7 2 4  |3
       1 2     241
         - 4
           1
```

4-) Um zero no interior do dividendo, conduz [um] zero ao interior do quociente .

```
Ex :   1 2 0 6  |3 <- divisor
         - 0 6   402 <- quociente
             0
dividendo
```

5-) O dividendo é terminado por zeros : os alg[arismos] do quociente e os restos parciais são [sem]pre os mesmos .

```
Ex :   1 0 0 0  |3
         1 0     3 3 3
           10
            1
```

6-) Dois zeros finais no dividendo, o resto [...] nulo, são colocados no quociente .

```
Ex :   1 5 3 0 0  |3
       - 3         5100
         -
```

7-) O resto final e o último algarismo abaixad[o] formam um número menor que o divisor, isto conduz a inscrição de um zero final no quo[cien]te . Ex :

```
       2 5 2  |5
       - 2     5 0
```


8-) O 1ºresto parcial nulo forma com o algarismo, abaixado, um número menor que o divisor, dando um zero ao quociente .

```
Ex :   3 5 2 5 7  |5
         - 2 5     7051
             - 7
               2
```

9-) A primeira estimação se faz sôbre dois algarismos, um resto nulo e um zero final do dividendo, conduzem um zero final ao quociente .

```
Ex :   3 2'7 6 0  |9
         5 7       3640
           3 6
             0
```

c) <u>O divisor tem dois ou mais algarismos</u>

1-) Estimações fáceis e exatas ao primeiro ensaio.

```
Ex :   1 2 8 1  |2 1
        - ^ 1    6 1
            0
```

2-) Estimações menos fáceis, por causa das reservas. O divisor termina por <u>8</u> .

```
Ex :   4 3 2  |1 8
       - 7 2   2 4
           0
```

3-) Formas mais trabalhosas de estimação sempre 8 no divisor .

```
Ex :   6 3 6 7 4  |7 8
         1 2 7     8 1 6
           4 9 4
             2 6
```

4-) Supressão prévia de um mesmo número de zeros no dividendo e no divisor .

```
Ex :   1476ØØ : 4ØØ  =  1476 : 4
         1476  |4
          27    369
           36
            0
```

5-) Estimações com zero interior ao quociente. Presença de <u>8</u> no divisor .

Ex : 35322 | 58
 522 | 609
 0

6-) Divisor de três algarismos, com zero no [...]rior .

Ex : 38592 | 603
 2412 | 64
 0

7-) Divisor de três algarismos, exigindo est[...]ções sôbre quatro algarismos do dividendo

Ex : 680624 | 824
 2142 | 826
 4944
 0

8- Provas

a) Para se fazer a prova real da [...]são, multiplica-se o divisor pelo quociente e [...]-se o resto com o produto obtido .

Como resultado, deve-se encontrar [...] dividendo . Ex :

76 | 9
4 | 8

Temos :

$8 \times 9 + 4 = 76$

b) Subtrai-se o resto do dividendo [...]vide-se o resultado pelo quociente .Esta últim[...]visão deve ser exata e o resultado igual ao div[...]

Ex : 49 | 5
4 | 9

Temos : $49 - 4 = 45$

45 | 9
0 | 5 ← divisor

EXERCÍCIOS

1 - Efetuar as seguintes divisões :

8 : 2 = ?	6 : 2 = ?	4 : 2 = ?
3 : 2 = ?	7 : 2 = ?	5 : 2 = ?
8 : 8 = ?	7 : 7 = ?	4 : 4 = ?
32 : 8 = ?	45 : 9 = ?	72 : 8 = ?
963 : 3 = ?	842 : 2 = ?	1684 : 4 = ?
928 : 4 = ?	1503 : 3 = ?	3000 : 7 = ?

126498 : 58 = ?
3207594 : 767 = ?
11408202 : 234 = ?
2100315 : 581 = ?

Resp: 2181
4182
48753
3615

2- Qual a propriedade fundamental das divisões exatas ? E inexatas ?
3- Como determinar o divisor de uma divisão exata, quando são dados o dividendo e o quociente ?
4- Como determinar o dividendo numa divisão exata, quando são dados o divisor e o quociente ?
5- Dados : q = quociente, d = divisor e r = resto, determinar o D = dividendo .
6- Dados : q = quociente, d = divisor e D = dividendo, determinar o r = resto .
7- Dados o D = dividendo, d= dividor, determinar o q = quociente e o r = resto .
8- Dados o D = dividendo, q = quociente, determinar o d = divisor e o r = resto .
9- Quando uma divisão se faz exatamente, qual é o maior número que se pode acrescentar ao dividendo, sem mudar o quociente .
10- Quando a divisão dá um resto, qual é o menor número que se pode subtrair do dividendo, para obter um quociente exato ?
11- Multipliquei o dividendo por 84 e o divisor por 42. Se o quociente era 35, qual será o novo quociente ?
12- Numa divisão, o quociente é igual ao divisor, e o resto é o maior possível . Se a soma do divisor com o quociente é igual a 18, qual será o dividendo ?
13- Dividir por 781 , o produto :
$18 \times 17 \times 781 \times 5$
14- Aplicar a propriedade distributiva, às seguintes expressões :
a) (36 + 42 - 24) : 6
b) (99 - 55) : 11

15- Determinar o número que dividido por 213,dê
ra quociente 401 e o resto 127 .

16- Pensei em certo número. Multipliquei-o por
e resultou 1000. Qual foi o número pensad

17- A diferença entre dois números é 72 e o se
ciente exato é 7. Quais são os dois número

18- A soma de dois números é o quíntuplo do me
a diferença é 240 . Achar os dois números .

19- Qual o número que se deve subtrair de 343
se obter um número 7 vêzes menor ?

20- Como se obter a soma dos quocientes das di
sões seguintes :
25 : 5   15 : 5   10 : 5 , fazen
uma só divisão ?

21- De quantos modos se pode tornar um quocien

a) 4 vêzes maior

b) 4 vêzes menor

$$$$$$$$$$$$

VII - OPERAÇÕES

POTENCIAÇÃO

1- Conceito

Consideremos o seguinte produto :

$7 \times 7 \times 7 = 343$ ⟵ Produto

Fatôres   3 nº de fatôres

Os matemáticos estabeleceram uma convenção para representar um produto de fatôres iguais: " escreve-se o fator e a direita, um pouco acima, um número que contém tantas unidades, quantos são os fatôres considerados ."

Ex :

base ⟶ $7^3 = 343$ ⟵ potência (3 ⟵ expoente)

Podemos portanto, concluir que **POTÊNCIA DE UM NÚMERO**, é um produto de fatôres iguais a êsse número .

Ex :

$$4^2 = 4 \times 4 = 16$$
$$11^2 = 11 \times 11 = 121$$
$$5^2 = 5 \times 5 = 25$$

Admitamos agora, que seja considerada a base de uma potência .

base = ? ⟶ $?^3 = 27$ ⟵ potência (expoente)

Faremos a seguinte pergunta : — Qual o número que elevado ao cubo (terceira potência) é igual a 27 ?

Para resolver êsse problema, os matemáticos inventaram uma nova operação : a radiciação .

Temos :

índice do radical → $\sqrt[3]{27} = 3$ ← raiz

radical — radicando

RADICIAÇÃO é a operação que tem por ob-
tivo, determinar a base, quando nós conhecemos o
poente e a potência.

Admitamos agora, que não conhecemos o
lor do expoente .

base → $5^{?} = 125$ ← potência ; expoente = ?

Faremos então a seguinte pergunta : A q
número devemos elevar 5, para obtermos 125 ?

Os matemáticos criaram uma nova opera
chamada logaritmação . Portanto :

LOGARITMAÇÃO é a operação que tem p
objetivo, determinar o expoente, quando nós con
mos a base e a potência .

$\log_5 125 = 3$ Devemos ler :

Logaritmo de cento e vinte e cinco n
se cinco , é igual a três .

Logo, a potenciação apresenta duas op
ções inversas : radiciação e logaritmação .

Potenciação { radiciação ; logaritmação

2- Operações

a) ADIÇÃO :
Ex : $7^3 + 2^2 = 343 + 4 = 347$

b) SUBTRAÇÃO :
Ex : $5^4 - 11^2 = 625 - 121 = 504$

c) MULTIPLICAÇÃO : Na multiplicação tem
4 casos a considerar :
Vejamos :

Multiplicação de potências

a) de mesma base e expoentes diferentes
b) de mesmo expoente e bases diferentes
c) de mesma base e mesmo expoente
d) de bases diferentes e expoentes diferentes

a) De mesma base e expoentes diferentes

De acôrdo com a definição de potência , temos :

$$7^3 \times 7^2 = \underbrace{7 \times 7 \times 7}_{3} \times \underbrace{7 \times 7}_{2} = 7^5$$

(3 + 2 = 5)

REGRA : Para multiplicar potências de mesma base e expoentes diferentes, dá-se a mesma base e somam-se os expoentes .

Exs :

$$5^4 \times 5^2 = 5^{4+2} = 5^6$$

$$11^8 \times 11^3 \times 11^2 = 11^{13}$$

$$7^3 \times 5^2 \times 7^4 \times 5^6 = 5^2 \times 5^6 \times 7^3 \times 7^4 = 5^8 \times 7^7$$

$$7^3 \times 7^5 \times 7 = 7^9$$

Por convenção : $7 = 7^1$

b) De mesmo expoente e bases diferentes

Ex : $7^3 \times 5^3$ = De acôrdo com a definição de potências, podemos escrever :

$$= \underbrace{7 \times 7 \times 7}_{3} \times \underbrace{5 \times 5 \times 5}_{3}$$

Aplicando a propriedade comutativa e associativa do produto, podemos escrever :

$= (7 \times 5) \times (7 \times 5) \times (7 \times 5)$ Efetuando os

produtos, temos : $\underbrace{35 \times 35 \times 35}_{3}$

Aplicando novamente a definição de po[tên]cias, podemos escrever finalmente :

$$7^3 \times 5^3 = 35^3$$

REGRA : Para multiplicar potências de bases d[ife]rentes e mesmo expoente, multiplicam-se as bases dá-se o mesmo expoente .

Ex : $11^4 \times 13^4 = 143^4$

$2^3 \times 5^3 \times 7^3 = 70^3$

c) De mesma base e mesmo expoente

Ex: $5^4 \times 5^4 = 25^4$ ou $5^4 \times 5^4 = 5^8$

d) De bases diferentes e expoentes difere[ntes]

Ex : $5^2 \times 3^3 =$ Neste caso, não podemos expr[i]mir o resultado sob a forma de potência , o que p[o]demos fazer, é efetuar os cálculos indicados .

$25 \times 27 = 675$

d) DIVISÃO

Temos quatro casos a considerar :

1) De mesma base e expoentes diferentes
2) De mesmo expoente e bases diferentes
3) De mesma base e mesmo expoente
4) De bases diferentes e expoentes dife[ren]tes .

1) De mesma base e expoentes diferentes

Ex : $7^5 : 7^2 = (7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7) : (7 \times 7) =$ Para dividir um produto por um número igual a um dos fatôres, basta cancelar êste fator .

$= 7 \times 7 \times 7 = 7^3$.

REGRA : Para dividir potência de mesma base e expoentes diferentes, dá-se a mesma base e subtraem-se os expoentes .

Ex : $13^5 : 13^2 = 13^{5-2} = 13^3$

$7^8 : 7^2 = 7^6$

$7^5 : 7^2 = 7^3$

2) De mesmo expoente e bases diferentes

Ex : $42^3 : 7^3 = (42 \times 42 \times 42) : (7 \times 7 \times 7) =$

$= 6 \times 6 \times 6 = 6^3$

REGRA : Para dividir potências de bases diferentes e mesmos expoentes, dá-se o mesmo expoente e dividem-se as bases .

Ex : $35^4 : 7^4 = 5^4$

$18^9 : 3^9 = 6^9$

3) De mesmo expoente e mesma base

Ex : $7^3 : 7^3 = 7^0$ ou $7^3 : 7^3 = 1^3$

$\boxed{7^0 = 1^3}$ $\boxed{7^0 = 1}$

NOTA

Dêste resultado podemos concluir que , qualquer quantidade elevada ao expoente zero (0), é igual a 1 .

Ex : $78^0 = 1$ $598^0 = 1$

$5^0 = 1$ $(7 + 9^2)^0 = 1$

4) De bases diferentes e expoentes diferentes .

Ex : $3^3 : 2^2 =$ Neste caso, não podemos representar o resultado sob a forma de potência .

$= 27 : 4 =$

$= 6,75$.

3- Potência elevada a um número

Ex: $(7^3)^2 = 7^3 \times 7^3 = 7^6$ Devemos ler: Sete elevado ao cubo, elevado ao quadrado.

REGRA: Multiplica-se o número pelo expoente da potência e dá-se a mesma base.

Ex: $(7^4)^3 = 7^{12}$

$(5^5)^4 = 5^{20}$

4- Um número elevado a uma potência

Ex: $7^{3^2} = 7^9$ Devemos ler: Sete elevado a três ao quadrado.

REGRA: Dá-se a mesma base e calcula-se a potência.

Ex: $5^{4^2} = 5^{16}$ $2^{3^2} = 2^9$

5- Produto elevado a um número

Ex: $(5 \times 7 \times 11)^2 = (5x7x11) \times (5x7x11)$

$= (5 \times 5)(7 \times 7)(11 \times 11) = 5^2 \times 7^2 \times 1$…

REGRA: Multiplica-se o número pelo expoente de cada fator.

6- Produto de potências elevado a um número

Ex: $(3^2 \times 5^3 \times 7^4)^3 = (3^2)^3 \times (5^3)^3 \times (7^4)^3$

$= 3^6 \times 5^9 \times 7^{12}$

REGRA: Multiplica-se o número pelo expoente de cada fator.

Ex: $(2^2 \times 5^4)^5 = 2^{10} \times 5^{20}$

$(3^4 \times 13^5 \times 17^8)^3 = 3^{12} \times 13^{15} \times 17^{24}$

EXERCÍCIOS

1- Potência de um número é um produto de.......... êsse número.

2- O número que é elevado a uma potência chama-se: .... e o número de vêzes que êsse número é tomado como fator, chama-se..............

3- Efetuar as operações:

$5^3 = ?$ $7^2 = ?$ $2^4 = ?$ $5^1 = ?$

$7^0 = ?$ $11^3 = ?$ $3^2 = ?$ $5^3 = ?$

$3^2 \times 5^3 = ?$ $7^2 - 3^3 = ?$

4- Efetuar, indicando os resultados sob a forma de potência, as operações seguintes:

a) $5^3 \times 5^2 \times 5^4 = ?$

b) $7 \times 7^3 \times 7^5 = ?$

c) $5^4 \times 7^4 = ?$

d) $13^4 \times 13^4 = ?$

e) $(7^2 \times 5)^3 = ?$

g) $(5^2 \times 3^3 \times 5^4)^3 = ?$

h) $(3^5 \times 2^4) : (3^3 \times 2^4) = ?$

i) $8^5 \times (2x4)^3 = ?$

j) $(20^3 \times 20^5) : (4^7 \times 5^7) = ?$

l) $35^3 : 35^2 = ?$

m) $7^5 : 7^2 : 7 = ?$

n) $45^3 : 5^3 = ?$

o) $17^5 : 17^5 = ?$

p) $(5^2 \times 3^3 \times 5^4) = ?$

q) $(2x5)^4 : (2x5)^2 = ?$

r) $5^4 \times 7^4 \times 10^4 = ?$

s) $(20^2)^3 : (4^3)^2 = ?$

t) $(7^2)^3 = ?$

u) $(2^2 \times 5^3)^4 \times (2^3 \times 5^2)^2 : (2^2 \times 5^4)^3 = ?$

v) $7^{2^3} = ?$

5- Transformar numa potência de base 15, o produto

$3 \times 5 \times 25 \times 3^2 = ?$

6- Calcule o produto do quadrado de $2 \times 3^2 \times 5$ pelo cubo de: $2^2 \times 3 \times 5^5$, exprimindo o resultado, por uma só potência de cada fator primo.

7- Multiplique o quadrado de $3^3 \times (2^3 \times 5)^2$; pelo cubo de $2^3 \times (3^2 \times 5)^3$ e dê o resultado expresso por uma só potência da cada fator primo.

6- Divida o cubo de $2^2 \times 3 \times 5^3$, pelo quadrad
3×5^2 e dê o resultado expresso por uma po
tência de cada fator primo .

7- PRODUTOS NOTÁVEIS

a) Quadrado da soma indicada de dois núme

Ex: $(7 + 3)^2$ = De acôrdo com a definição de
tência de um número, podemos escrever
$= (7 + 3)(7 + 3)$ = Já sabemos que, " - Pa
multiplicar duas somas indicadas, mult
plicam-se cada parcela de uma soma por
das as parcelas da outra e somam-se os
produtos obtidos .

$= 7 \times 7 + 7 \times 3 + 7 \times 3 + 3 + 3 \times 3 = 7^2 + 2 \times 7 \times 3 + 3^2$

REGRA: O quadrado da soma indicada de dois núme
é igual ao quadrado do primeiro, mais o dôbro
produto do primeiro pelo segundo, mais o quadr
do segundo .

b) Quadrado da diferença indicada de dois
números .

Ex: $(9 - 4)^2 = (9 - 4)(9 - 4) =$

$= (9 - 4)\,9 - (9 - 4)\,4 =$

$= 9^2 - 9 \times 4 - (9 \times 4 - 4 \times 4) =$

$= 9^2 - 9 \times 4 - 9 - 4 + 4^2 = 9^2 - 2 \times 9 \times 4$

REGRA :
O quadrado da diferença indicada de d
números é igual ao quadrado do primeiro, menos
bro do primeiro pelo segundo, mais o quadrado d
gundo .

c) Produto da soma indicada ,pela diferença de dois números

Ex : $(11 + 3)\ (11 - 3) = (11 + 3)\,11 - (11 + 3)\,3 = 11 \times 11 + 11 \times 3 - 11 \times 3 - 3 \times 3 = 11^2 - 3^2$.

REGRA : O produto da soma indicada pela diferença indicada de dois números, é igual ao quadrado do primeiro, menos o quadrado do segundo .

Aplicação

1) Elevar ao quadrado um número inteiro, decompondo-o em dezenas e unidades .

Ex : Seja calcular o quadrado de 36 . Aplicando a
Temos : $36^2 = (30 = 6)^2$
regra de quadrado da soma indicada de dois números, teremos : $= 30^2 + 2 \times 30 \times 6 + 6^2 =$

$= 900 + 360 + 36 = 1296$

REGRA : O quadrado de um número inteiro decomposto em dezenas e unidades, é igual ao quadrado das dezenas, mais o duplo produto das dezenas pelas unidades, mais o quadrado das unidades .

2) Diferença dos quadrados de dois números inteiros e consecutivos .

Ex : $17^2 - 16^2 = \underbrace{(17 + 16)}_{\text{Soma dos dois números}}\ \underbrace{(17 - 16)}_{1} = 17 + 16$

REGRA : A diferença dos quadrados de dois números inteiros e consecutivos , é igual a sua soma .

Ex : A diferença entre os quadrados de dois números inteiros e consecutivos é igual a 87. Quais são os números ?

Primeiro^2 - Segundo^2 = 87 ou

Primeiro + Segundo = 87 ou

Segundo + 1 $\begin{cases} \text{Primeiro} + \text{Segundo} = 87 \\ \text{Primeiro} - \text{Segundo} = 1 \end{cases}$

Logo: Primeiro → $\frac{(87 + 1)}{2} = \frac{88}{2} = \underline{44}$

Segundo → 44 - 1 = $\underline{43}$

Resposta : 44 e 43

E X E R C Í C I O S

1- Desenvolver : $(7 + 3)^2$ $(5 + 4)^2$ $(8 + 5)^2$

$(11 + 3)^2$ $(9 - 5)^2$ $(6 - 2)^2$ $(13 - 3)^2$

$(7 + 3)(7 - 3)$ $(9 + 4)(9 - 4)$

$(11 + 5)(11 - 5)$

2- Determinar os quadrados dos seguintes números, decompondo-os nas suas dezenas e unidades : 43, 52, 36 e 18 .

3- Calcular o quadrado que se deve somar a : $7^2 + 2 \times 7 \times 8$, para se obter o quadrado de $7 + 8$.

4- A diferença entre os quadrados de dois números inteiros e consecutivos é 27. Quais são êsses números ?

5- Achar a diferença entre os quadrados de 27 e 2[illegible] sem elevá-los ao quadrado .

6- Um número aumentado de 1, faz o seu quadrado aumentado de 11. Qual é êsse número ?

7- Calcule o menor número que se deve somar a 420 afim de se obter um quadrado .

$$$$$$$$$$$$$$$$$$$

VIII - O P E R A Ç Õ E S

R A D I C I A Ç Ã O

RAIZ QUADRADA

1- Origem

- A palavra raiz vem do latim radix , radicis , mas, é indubitável que os árabes conheciam a radiciação, pois tinham aprendido com os indús .

A radiciação era conhecida, muito antes dos romanos inventarem [illegible] palavra para nomeá-la .

Os árabes a [illegible]garam com a palavra : " gidr ", uma traduç[illegible] palavra sânscrita: mula , que significa : vege[illegible] também raiz quadrada de um número .

Admitamos que seja desconhecida a base de uma potência .

$$\text{base} = ? \longrightarrow \bullet^{3 \leftarrow \text{expoente}} = 125 \leftarrow \text{potência}$$

Faremos então a seguinte pergunta :-Qual o número que elevado ao cubo (terceira potência) é igual a 125 ?

Para fazer esta pergunta, os matemáticos convencionaram um novo símbolo operatório : radical

Radical $\sqrt{}$

índice do radical. → 3

$$\sqrt[3]{125} = 5 \leftarrow \text{raiz}$$

radical ↗ ; radicando ↖

2- Raiz quadrada exata de um número

É o número que elevado ao quadrado, reproduz exatamente o número dado. Assim, 5 é a raiz quadrada exata de 25, porque : $5^2 = 25$.

Primeiro^2 - Segundo^2 = 87 ou

Primeiro + Segundo = 87 ou

Segundo + 1 $\begin{cases} \text{Primeiro + Segundo} = 8 \\ \text{Primeiro - Segundo} = 1 \end{cases}$

Logo: Primeiro → $\frac{(87 + 1)}{2} = \frac{88}{2} = \underline{44}$

Segundo → 44 - 1 = <u>43</u>

Resposta : 44 e 43

EXERCÍCIOS

1- Desenvolver : $(7 + 3)^2$ $(5 + 4)^2$ $(8 + 5)^2$

$(11 + 3)^2$ $(9 - 5)^2$ $(6 - 2)^2$ $(13 - 3)^2$

$(7 + 3)(7 - 3)$ $(9 + 4)(9 - 4)$

$(11 + 5)(11 - 5)$

2- Determinar os quadrados dos seguintes números, decompondo-os nas suas dezenas e unidades : 43, 52, 36 e 18 .

3- Calcular o quadrado que se deve somar a : 7^2 + 2 x 7 x 8 , para se obter o quadrado de 7 + 5 .

4- A diferença entre os quadrados de dois números inteiros e consecutivos é 27. Quais são êsses números ?

5- Achar a diferença entre os quadrados de 27 e 2[illegible] sem elevá-los ao quadrado .

6- Um número aumentado de 1, faz o seu quadrado aumentado de 11. Qual é êsse número ?

7- Calcule o menor número que se deve somar a 420, afim de se obter um quadrado .

$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$

RADICIAÇÃO

RAIZ QUADRADA

1- Origem

- A palavra <u>raiz</u> vem do latim radix , radicis , mas, é indubitável que os árabes conheciam a radiciação, pois tinham aprendido com os indús .

A radiciação era conhecida, muito antes dos romanos inventarem uma palavra para nomeá-la .

Os árabes a designaram com a palavra : " gidr ", uma tradução da palavra sânscrita: <u>mula</u> , que significa : <u>vegetal</u> e também <u>raiz quadrada de um número</u> .

Admitamos que seja desconhecida a base de uma potência .

$$\text{base} = ? \longrightarrow \bullet^{3 \leftarrow \text{expoente}} = 125 \leftarrow \text{potência}$$

Faremos então a seguinte pergunta :- Qual o número que elevado ao cubo (terceira potência) é igual a 125 ?

Para fazer esta pergunta, os matemáticos convencionaram um novo símbolo operatório : <u>radical</u>

Radical $\sqrt{}$

índice do radical → $\sqrt[3]{125} = 5$ ← raiz

radical ↗ ↖ radicando

2- <u>Raiz quadrada exata de um número</u>

É o número que elevado ao quadrado, reproduz exatamente o número dado. Assim, 5 é a raiz quadrada exata de 25, porque : $5^2 = 25$.

7 é a raiz quadrada exata de 49, porque $7^2 = 49$

3- Raiz quadrada inexata ou inteira de um número

É o maior número cujo quadrado está contido no número dado (raiz quadrada inexata por falta) ou o número cujo quadrado excede em menos o número dado (raiz quadrada inexata por excesso).

Assim, 6 é a raiz quadrada inexata por falta de 39, porque : $6^2 = 36$ e 6 é o maior número cujo quadrado está contido em 39.

7 é a raiz quadrada inexata por excesso de 43, porque : $7^2 = 49$ e 7 é o número cujo quadrado excede 43.

4- Resto por falta da raiz quadrada inexata de um número.

É a diferença entre o número e o quadrado de sua raiz quadrada por falta.

Assim, a raiz quadrada de 54 é 7 e o resto é : $54 - 7^2 = 54 - 49 = 5$

5- Raiz quadrada dos números inteiros

Podem ocorrer dois casos :

a) O número dado é menor do que 100.

b) O número dado é maior do que 100.

a) O número dado é menor do que 100.

$N < 100$

Consideremos os quadrados dos 10 primeiros números. Temos a regra a seguir.

REGRA : Procura-se entre os nove primeiros números aquêle cujo quadrado seja igual ou o mais próximo do número dado, e, o dito número será a raiz quadrada do número dado.

Vejamos um exemplo :

Número	Quadrados
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36
7	49
8	64
9	81
10	100

Ex : $\sqrt{25} = ?$ 5 $\sqrt{57} = ?$

(57 está compreendido entre 49 e 64, logo, a sua raiz quadrada está compreendida entre 7 e 8).

$\sqrt{49} < \sqrt{57} < \sqrt{64}$ ou $7 < \sqrt{57} < 8$

Quer consideremos os números 7 ou 8, cometeremos um êrro menor do que a unidade. Se dissermos que a $\sqrt{57}$ é 7, cometeremos um êrro menor do que a unidade por excesso.

57

7 — 1 — 8

Êrro cometido se considerarmos 7, como sendo a $\sqrt{57}$

Êrro cometido se considerarmos 8, como sendo a $\sqrt{57}$

b) O número dado é maior do que 100

$N > 100$

A extração da raiz quadrada baseia-se no seguinte princípio :

" O quadrado de um número composto de dezenas e unidades, é igual ao quadrado das dezenas, mais o dôbro das dezenas pelas unidades, mais o quadrado das unidades. "

Ex : $\sqrt{3249}$

Êste número é maior que 100, logo a raiz quadrada é maior que 10, e por isso será composta de dezenas e unidades. Ora, como o quadrado das dezenas dá, pelo menos centenas, êste quadrado só pode estar contido nas 32 centenas do número (dado), e, por isso, separamos por um ponto, os dois últimos algarismos da direita do número dado

```
√ 32.49  | 57
 -25     |-----------
  74.9   | 2 x 5   = 10
  74.9   | 107 x 7 = 749
   0     |
```

Se em 32 centenas está contido o quadrado das dezenas da raiz, obteremos estas dezenas, extraindo a raiz quadrada do maior quadrado contido em 25 centenas. 5 será o algarismo das dezenas da raiz. Elevando 5 ao quadrado, obteremos 25 centenas, que subtraídas de 3249 darão um resto igual a 749 .

Êste resto conterá as outras duas parcelas do quadrado da raiz, a saber :

-O dôbro do produto das dezenas pela unidade (2 d.u.) e o quadrado das unidades (u^2).

O dôbro do produto das dezenas pelas unidades dá pelo menos dezenas. Logo, só pode estar contido, nas 74 dezenas do resto .

Separamos então, por um ponto, o último algarismo da direita do resto.

Em 74 dezenas está contido pois, o dôbro das dezenas da raiz. Como conhecemos o número de dezenas que é 5, podemos formar o dôbro das dezenas :
2 x 5 = 10

Se em 74 dezenas está o dôbro do produto das dezenas pelas unidades, e, 10 dezenas é o dôbro das dezenas, acharemos as unidades da raiz, dividindo 74 por 10. O quociente 7 será o algarismo das unidades da raiz .

A raiz sendo composta de 5 dezenas e 7 unidades , será : 57

NOTA : Se o número tomado para valor das unidades fôr excessivo, "forte", como é comum dizermos , diminuí-lo de 1, 2, 3.... unidades até encontrar o número conveniente .

Ex :

```
√ 14.44  | 3
 -9      |-----------
  54.4   | 2 x 3  = 6
  54.4   | 69 x 9 = 621 ( 9 é
   0     |               forte)
         | 68 x 8 = 544
```

Vejamos outro exemplo :

Seja a raiz quadrada de 191844 .

Vamos usar o mesmo raciocínio . Como êste número é maior que 100, a sua raiz quadrada é maior que 10, logo, será composta de dezenas e unidades .

Ora, o quadrado de um número composto de dezenas e unidades , é formado do quadrado das dezenas, mais o dôbro do produto das dezenas pelas unidades, mais o quadrado das unidades .

Como o quadrado das dezenas dá, pelo menos centenas, o quadrado das dezenas da raiz terá que estar nas 1918 centenas do número dado, e por isso, separamos por um ponto, os dois últimos algarismos (44) da direita .

```
√ 191844  | 438
 -16      |-----------
  31.8    | 2 x 4   = 8
  24.9    | 83 x 3  = 249
  69.44   | 43 x 2  = 86
  69.44   | 868 x 8 = 6944
   0      |
```

Se em 1918 está contido o quadrado das dezenas da raiz, acharemos as dezenas da raiz quadrada do maior quadrado contido em 1918 centenas .

Aplicando a regra do caso anterior, acharemos 44 dezenas e como resto 69 centenas .

Reunindo estas 69 centenas às 44 unidades do número dado, formaremos o número 6944, que é a diferença entre o número dado 191844 e o quadrado das 44 dezenas .

Este número conterá pois, o dôbro do produto das dezenas (44) da raiz, pelas unidades, mais

o quadrado das unidades.

Como o dôbro do produto de dezenas por unidades dá, pelo menos, dezenas, êle só poderá estar contido nas 694 dezenas do resto ; daí separarmos por um ponto, o último algarismo (4) da direita do resto .

Dividindo-se 694 dezenas, que contém o dôbro do produto das dezenas pelas unidades (43 x 2) por dezenas (86 dezenas), que é o dôbro das dezenas, acharemos 8 . que é o número de unidades da raiz .

A raiz deverá ser pois, 438 .

REGRA GERAL

-Divide-se o número em classes de dois algarismos à partir da direita para a esquerda, podendo a primeira classe da esquerda ter um algarismo.

-Extrai-se a raiz quadrada do maior quadrado contido na 1ª classe ; obtem-se o primeiro algarismo da raiz . Eleva-se o número representado por êste algarismo ao quadrado, e, subtrae-se da 1ª classe à esquerda .

-Escreve-se à direita do resto, a classe seguinte do número. Separa-se o último algarismo da direita e divide-se a parte à esquerda, pelo dôbro do número representado pelo 1º algarismo da raiz ; obtem-se assim, como quociente, o segundo algarismo da raiz .

-Escreve-se êste 2º algarismo à direita do dôbro do número, representado pelo 1º algarismo, e, multiplica-se pelo número representado por êste 2º algarismo . O produto obtido, subtrae-se do primeiro resto parcial .

-À direita do novo (2º) resto, escreve-se a classe seguinte do número dado; separa-se o último algarismo da direita e divide-se a parte à esquerda, pelo dôbro do número formado (pelos algarismos já achados da raiz). O quociente obtido, dá o 3º algarismo da raiz .

-Escreve-se êste 3º algarismo da raiz , à direita do duplo produto que acabamos de formar; multiplica-se o número formado, pelo número representado por êste 3º algarismo e subtrae-se o produto encontrado, do segundo resto parcial .

-Ao lado dêste novo (3º) resto, escreve-se a classe seguinte do número e prossegue-se como nas operações anteriores, até se considerarem tôdas as classes do número dado .

-Se não fôr possível efetuar qualquer das subtrações citadas, diminue-se o quociente obtido na divisão anterior, de tantas unidades, quantas sejam necessárias para tornar a subtração possível .

-Se qualquer resto parcial não permitir a divisão correspondente (caso em que o quociente é zero), escreve-se um zero à direita da parte já achada da raiz ; abaixa-se a classe seguinte do número e prossegue-se a operação .

E X E M P L O S

Seja extrair a raiz quadrada de 7343 .

a) Divide-se o número dado em classes de dois algarismos, a partir da direita :

$$\sqrt{73.43}\;\underline{\qquad}$$

b) Extrai-se a raiz quadrada, a menos de uma unidade, da primeira classe (73) ; obtem-se assim, o primeiro algarismo (8) da raiz :

$$\sqrt{73.43}\;\underline{|\;8\qquad}$$

c) Eleva-se a raiz obtida ao quadrado e subtrae-se o resultado (64) da classe considerada (73) :

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{73.43} & \underline{8\qquad} \\ \underline{-64} & \\ \quad 9 & \end{array}$$

d) Ao lado do resto (9), escreve-se a classe seguinte (43) ; forma-se dêsse modo, o primeiro resto parcial (943) .
Teremos então :

```
 √ 73.43 | 8
   -64   |
    94.3 |
```

e) Prescinde-se do último algarismo à direita (3) e divide-se a parte à esquerda (94), pelo dôbro da raiz (16) :   94 : 16 = 5

f) Escreve-se o quociente obtido (5), ao lado do primeiro algarismo da raiz e do seu dôbro (16), e multiplica-se por êsse quociente, o número assim formado (165) :

```
 √ 73.43 | 85
   -64   | 165 x 5 = 825
    94.3 |
```

g) Subtrai-se o produto obtido (825) do primeiro resto parcial (943) :

```
 √ 73.43 | 85
   -64   | 165 x 5 = 825
    94.3 |
   -82.5 |
    11.8 |
```

Seja extrair a raiz quadrada de 648029

```
 √ 64.80.29 | 805
   -64      | 1605 x 5 = 8025
    08.02.9 |
    -8.02.5 |
          4 |
```

6- Prova

A prova consiste em elevar a raiz encontrada ao quadrado e somar ao resto : o resultado, deve ser o número dado .

Por exemplo : No número anterior vimos :

$N = R^2 + r$

$648029 = 805^2 + 4$

$648029 = 648029 + 4$

$$\begin{cases} \text{número} = 648029 \\ \text{raiz} = 805 \\ \text{resto} = 4 \end{cases}$$


```
   805
  x805
  4025
 64400
648025
```

7- Limite do resto na extração da raiz quadrada

Suponhamos que a raiz quadrada de N seja R, com êrro menor do que uma unidade por falta, e que r seja o resto da raiz .

```
número dado ──> √N  | R <── raiz
               r <  |
               resto
```

Teremos então : $N = R^2 + r$ (1)

Admitamos que r é o dôbro da raiz, $R + 1$

$r = 2R + 1$, A igualdade (1) ficaria :

$N = R^2 + 2R + 1$

Lembrando a regra do quadrado da soma de dois números, podemos escrever :

$$N = (R + 1)^2$$

E nêste caso, a raiz quadrada do número não seria R e sim : $R + 1$, o que nos faria concluir que a raiz teria sido feita erradamente .

Portanto, podemos afirmar :

" O resto de uma raiz quadrada pode no máximo , ser igual ao dôbro da raiz " .

8- Raiz quadrada de um produto

Da mesma maneira que, para elevar um produto ao quadrado, elevamos cada fator ao quadrado e multiplicamos os resultados :

"Para extrairmos a raiz quadrada de um produto, extraimos a raiz quadrada de cada fator e multiplicamos os resultados".

Temos :

Ex : $\sqrt{64 \times 121} = \sqrt{64} \times \sqrt{121} = 8 \times 11 = \underline{88}$

E X E R C Í C I O S

1- Achar as raizes indicadas :

$\sqrt{64} = ?$ $\sqrt{9} = ?$ $\sqrt{25} = ?$ $\sqrt{1} = ?$

$\sqrt{34 + 2} = ?$ $\sqrt{75 - 11} = ?$ $\sqrt{25 \times 36} = ?$

2- Extrair a raiz quadrada a menos de uma unidade, dos seguintes números : 574, 956, 2348, 31005.

3- Extrair as raizes quadradas dos seguintes produtos : 36 x 25 9 x 16 x 64 81 x 144

4- Qual o menor número que se deve subtrair de 8560 para obter um quadrado ?

5- A raiz quadrada de um número é 23 e o resto 35. Achar o número .

6- A soma dos quadrados de dois números é 613 e o número maior é 18. Achar o menor .

$$$$$$$$$$$$$$$$

IX - D I V I S I B I L I D A D E

1- Consideremos o seguinte exemplo :

múltiplo ⟶ 45 |9 ⟵ divisor
0 5

Diremos que 45 é um múltiplo de 9, porque êle contém 9, um número inteiro de vêzes .

O número 9, que está contido um número inteiro de vêzes em 45, é chamado : <u>divisor</u> .

Para representarmos simbòlicamente que, 45 é múltiplo de 9, escrevemos : $45 = \dot{9}$

Na prática, é conveniente sabermos quando um número é divisivel por outro, sem efetuarmos a divisão .

Para determinar todos os múltiplos de um número, é suficiente multiplicá-lo pela sucessão de todos os números naturais .

Ex : 3 x 1 = 3 3 x 3 = 9
3 x 2 = 6 3 x 4 = 12 ....

<u>Propriedades dos múltiplos</u>

As propriedades fundamentais dos múltiplos são :

a) A soma de vários múltiplos de um número, é um múltiplo dêste número .

b) A diferença de dois múltiplos de um número, é um múltiplo dêste número .

c) Todo múltiplo de um múltiplo de um número é múltiplo dêste número .

a) <u>A soma de vários múltiplos de um número, é um múltiplo dêste número</u> .

Hip. $\begin{cases} 45 = \dot{5} \\ 25 = \dot{5} \\ 30 = \dot{5} \end{cases}$ Tese: $\{ 45 + 25 + 30 = \dot{5}$

Demonstração :

$45 = 9 \times \dot{5}$
$25 = 5 \times 5$
$30 = 6 \times 5$

Somando membro a membro as igualdades, obtemos ainda uma igualdade :

$45 + 25 + 30 = 9 \times 5 + 5 \times 5 + 6 \times 5$

Colocando o fator cinco (5) em evidência

$45 + 25 + 30 = \underbrace{(9 + 5 + 6)}_{\text{nº inteiro}} . 5$

Logo : $45 + 25 + 30 = \dot{5}$

b) <u>A diferença de dois múltiplos de um número é um múltiplo dêste número</u> .

Hip. $\begin{cases} 35 = \dot{7} \\ 21 = \dot{7} \end{cases}$ Tese : $\{ 35 - 21 = \dot{7}$

Demonstração :

$35 = 5 \times 7$
$21 = 3 \times 7$

Subtraindo membro a membro estas duas igualdades, obtemos ainda uma igualdade .

$35 - 21 = 5 \times 7 - 3 \times 7$

Colocando o <u>7</u> em evidência :

$35 - 21 = \underbrace{(5 \times 3)}_{\text{nº inteiro}} . 7$

Logo : $35 - 21 = \dot{7}$

c) <u>Todo múltiplo de um múltiplo de um número é múltiplo dêste número</u> .

Hip. $\begin{cases} 60 = \dot{15} \\ 15 = \dot{3} \end{cases}$ Tese : $\{ 60 = \dot{3}$

$60 = 4 \times 15$
$15 = 5 \times 3$

Substituindo o 15, por 5 x 3 , de acôrdo com a propriedade dissociativa :

Teremos : $60 = 4 \times 5 \times 3$

Aplicando a propriedade associativa :

$60 = (4 \times 5) \times 3$

$60 = 20 \times 3 \qquad 60 = \dot{3}$

Estas propriedades possibilitam estabelecer um critério geral, para a determinação dos caractéres de divisibilidade .

Vejamos alguns exemplos :

a) <u>Divisibilidade por 2</u>

Consideremos um número qualquer : 7485

Decompondo-o nas unidades de diversas ordens , teremos :

$7485 = 7 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 8 \times 10 + 5 =$
$= 7 \times \dot{2} + 4 \times \dot{2} + 8 \times \dot{2} + 5 =$
$= \dot{2} + \dot{2} + \dot{2} + 5 = \underline{\dot{2} + 5}$

O resultado ($\dot{2} + 5$), que permite estabelecer a regra prática :

" Para que um número seja divisivel por <u>2</u>, é necessário que o valor das unidades o seja " .

Exprimindo tôdas as potências de 10 , em relação ao divisor <u>2</u> , teremos :

$10 \div 2 = 5$, resto 0 $\qquad 100 \div 2 = 50$, resto 0 $\qquad 1000 \div 2 = 500$, resto 0

$10 = \dot{2} \qquad 10^2 = \dot{2} \qquad 10^3 = \dot{2}$

Qualquer potência de 10, é um múltiplo de <u>2</u> .

b) <u>Divisibilidade por 3</u>

Dado um número qualquer : 84567, procuremos estabelecer o critério de divisibilidade por <u>3</u>.

$84567 = 8 \times 10^4 + 4 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 6 \times 10 + 7 =$
$= 8 \times (\dot{3}+1) + 4 \times (\dot{3}+1) + 5 \times (\dot{3}+1) + 6 \times (\dot{3}+1) +$
$+ 7 =$

Aplicando a propriedade distributiva em relação à adição, temos :

$= \dot{3} + 8 + \dot{3} + 4 + \dot{3} + 5 + \dot{3} + 6 + 7 =$

$= \dot{3} + \underline{8 + 4 + 5 + 6 + 7}$

O resultado acima, nos permite estabelecer a seguinte regra prática :

```
10000 |3
 10    3333.....
  10
   10
    1
```

" Para que um número seja divisível por 3 é necessário que a soma dos valores absolutos de seus algarismos o seja ."

$10 = \dot{3} + 1 \quad 10^2 = \dot{3} + 1 \quad 10^3 = \dot{3} + 1$

Qualquer potência de 10 é um múltiplo de 3, mais um (1) .

A dedução de todos os critérios de divisibilidade obedece o mesmo raciocínio !

2- CARACTERES DE DIVISIBILIDADE

Os caracteres de divisibilidade, são regras práticas, que nos possibilitam reconhecer quando um número é divisível por outro, sem necessidade de fazer a divisão .

→ a) Div. por 2

REGRA:

Um número é divisível por 2, quando o seu algarismo das unidades é par .

Ex : 34<u>1</u> não é divisível por 2 e o resto é um .

45<u>6</u> é divisível por 2 e o resto é 0.

→ b) Div. por 3

REGRA :

Um número é divisível por 3, quando a soma dos valores absolutos de seus algarismos é um múltiplo de 3 .

Ex: 475 Temos : 4 + 7 + 5 = 16 . E 16 não é divisível por 3. Resto = 1

NOTA :

O resto da divisão do número 475 por 3 é o mesmo resto da divisão da soma de seus algarismos por 3 .

→ c) Div. por 4

REGRA :

Um número é divisível por 4, quando a soma do valor das unidades e o dôbro do valor absoluto do algarismo das dezenas é um múltiplo de 4 .

Ex : 573 Temos : 3 + 2x7 = 3 + 14 = = 17 .

<u>17</u> não é múltiplo de 4, logo, o número 573 também não é, e o resto da divisão dêste número por 4 é 1 .

→ d) Div. por 5

REGRA :

Um número é divisível por 5, quando o algarismo das unidades fôr <u>0</u> ou <u>5</u> .

Ex :
572 - não é divisível
678 - não é divisível
780 - é divisível
535 - é divisível

NOTA 1 : Quando o valor do algarismo das unidades é menor do que 5, êsse valor será o próprio resto da divisão do número considerado, por 5 .
Ex : 57<u>2</u> . 2 é o resto da divisão de 572 por 5 .

NOTA 2 : Quando o valor do algarismo das unidades é maior do que 5, o resto da divisão é obtido pela diferença entre aquêle valor e cinco .
Ex : 678 - Se você fizer a divisão ficará convencido .

```
678 |5
17   135
 28
(3)←resto
```

O resto será dado pela diferença : 8 - 5 = 3

→ e) Div. por 6

REGRA :

Para verificar se um número é divisível por 6, separa-se o algarismo das unidades por meio de um traço vertical e determina-se a diferença entre o dôbro da soma dos valores absolutos dos algarismos que ficam à esquerda do traço e o valor das unidades.

Ex : a) 357|5 Temos: 2 (3+5+7) -5 = = 2 x 15 - 5 = 30 -5 = 25

25 não é divisível por 6, logo, o número 3 75, também não é.

25 |6
1 4

O resto da divisão do número 3575x6 será dado pela diferença :

6 - 1 = 5

b) 839|6 Temos: 2 x(8+3+9) - 6 = = 2x20 - 6 = 40 - 6 = 34

34 |6
4 5

Não é divisível e o resto : 6 - 4 = 2

→ f) Div. por 7

Temos dois casos a considerar, conforme o número considerado, seja maior ou menor do que mil (1000).

1º Caso : Número < 1000

REGRA :

Para que um número menor do que mil, seja divisível por 7, é necessário que a soma do valor das unidades, triplo do valor absoluto do algarismo das dezenas e dôbro do valor absoluto do algarismo das centenas, seja um múltiplo de 7.

Ex : 572 Temos: 2 + 3x7 + 2x5 = = 2 + 21 + 10 = 33

33 |7
5 4

33 não é divisível por 7, logo 572 também não é. O resto da divisão é 5.

2º Caso : Número > 1000

Devemos proceder da seguinte maneira :

Ex : Verificar se 78.453,642 é divisível por 7

a) Dividimos o número em classe de três algarismos, a partir da direita para a esquerda.

78. 453. 642
3ª 2ª 1ª

b) Aplicamos a cada classe, a regra de quando o número é menor do que mil.

1ª) 2 + 12 + 12 = 26

2ª) 3 + 15 + 8 = 26

3ª) 8 + 21 = 29

c) Determinamos a diferença entre a soma dos resultados das classes de ordem ímpar e a soma dos resultados das classes de ordem par. (26 + 29) - 26 = 29

d) Se esta diferença fôr 0, 7 ou um número múltiplo de 7, o número dado será divisível por 7. No caso, o número considerado, não é divisível por 7 e o resto é 1.

29 |7
1 4

NOTA :

Quando a soma dos resultados de ordem ímpar fôr menor do que a soma dos resultados de ordem par, acrescentamos primeiro, tantos 7, quantos fôrem necessários, para que a diferença seja possível.

Ex : 38.978.213
3ª 2ª 1ª

1ª) 3 + 3 + 4 = 10

2ª) 8 + 21 + 18 = 47

3ª) 8 + 9 = 17

Temos : (10 + 17) - 47 = ?
= 27 - 47 = ?

Somando : 3 x 7 = 21 , temos : 48-47 = 1 , portanto, o número não é divisível por 7.

g) Div. por 8

REGRA :

Um número é divisível por 8, quando a soma das unidades, dôbro do valor absoluto do algarismo das dezenas e quádruplo do valor absoluto do algarismo das centenas, é um múltiplo de 8 .

Ex : 27346 Temos : 6 + 2x4 + 4x3 =
= 6 + 8 + 12 = 26

26 | 8
2 3

resto

O número por conseguinte, não é divisível por 8 e o resto 2.

h) Div. por 9

REGRA :

Um número é divisível por 9, quando a soma dos valores absolutos de seus algarismos é um múltiplo de 9 .

Ex : 347236 Temos: 6+3+2+7+4+3 = 25

25 | 9
resto → 7 2

O número não é divisível e o resto é 7 .

i) Div. por 10

REGRA :

Um número é divisível por 10, quando termina em zero (0).

Ex : 740 é divisível por 10
846 não é divisível por 10.

NOTA : O resto da divisão de um número qualquer por 10, é o próprio valor do algarismo das unidades .

Ex: 872 O resto é 2 .

j) Div. por 11

REGRA :

Um número é divisível por 11, quando a diferença entre a soma dos valores absolutos dos algarismos de ordem ímpar e a soma dos valores absolutos dos algarismos de ordem par, é 0 , 11 ou múltiplo de 11.

Ex : 1 5 3 7 6 4
+ - + - + -

Ordem par (+)
Ordem ímpar (-)

Temos : ordem ímpar: 4 + 7 + 5 = 16; ordem par: 6 + 3 + 1 = 10

16 - 10 = 6

O número portanto, não é divisível por 11, e o resto é 6 .

NOTA :

Quando a soma dos valores absolutos dos algarismos de ordem ímpar, fôr menor do que a soma dos valores absolutos dos algarismos de ordem par, devemos acrescentar à primeira, tantos 11, conforme sejam necessários, para que a diferença seja possível .

Ex : 6 3 9 8 7 5
+ - + - + -

(5 - 8 - 3) - (7 + 9 + 6) = 16 - 22

Adicionando 11

Temos : 27 - 22 = 5 O número dado , não é divisível por 11 .

3- EXERCÍCIOS

1- Por quais dos números são divisíveis os números 84, 375 e 136 ? (2,3,4,5)
2- Verificar se o número 74525 é divisível por 3; se não fôr, determinar o resto da divisão .
3- Determinar o menor número que se deve somar à 74821, para obter um múltiplo de 3 .
4- Dado o número 7456, colocar um algarismo entre o 5 e o 6, de modo a fornecer um número de cinco algarismos divisíveis por 9 .
5- Determinar os restos das divisões dos números : 745, 8478, 6045, 3021, por 2,3,4,5,6,7,8,9,10,11.
6- Substituir a letra a por um algarismo, de modo que o número 75a1, seja divisível por 3 e 9.

X - TEORIA DOS NÚMEROS PRIMOS
DECOMPOSIÇÃO EM FATÔRES PRIMOS
MÁXIMO DIVISOR COMUM (M.D.C.)
MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM (M.M.C.)

1 - TEORIA DOS NÚMEROS PRIMOS

a) Euclides ao descobrir a infinidade da série dos números primos, alcançou seu máximo desenvolvimento, " a teoria dos números entre os gregos ".

Não houve novos processos nêste campo, até que Fermat em 1630-65 , propôs seu teorema sôbre os expoentes primos .

L.S.Dickson afirma em sua " History of Theory of numbers ", que os chineses já conheciam, êste problema no ano 500 A.C.

b) Números primos absolutos

São os que sòmente são divisíveis por si mesmo e por 1, como : 2, 3, 7, 13 .

Os números primos formam um conjunto denominado : conjunto dos números primos .

O conjunto dos números primos é ilimitado.

c) Números primos entre si

Dois ou mais números dizem-se : primos entre si, quando só têm como divisor comum, a unidade.

Ex : 8 e 15 .

Dois ou mais números são primos entre si, dois a dois, quando dois quaisquer dentre êles, são primos entre si .

Assim, os números : 15, 22 e 49, são primos entre si dois a dois, por isso 15 e 22, 15 e 49 22 e 49, são primos entre si .

d) Tabela de números primos

Para construção da tabela dos números primos, utilizaremos o processo devido à Eratóstenes , filósofo grego, matemático, geógrafo e grande atleta .

Êste processo recebe a denominação de : Crivo de Eratóstenes .

Ex : Formar a tabela dos números primos de 1 até 101 .

Devemos em primeiro lugar, escrever a sucessão dos números primos de 1 à 101 , em seguida, a partir de 2, exclusive, contamos de dois em dois,para cancelarmos os múltiplos de 2 ; a partir de 3, exclusive, contamos de 3 em 3, para cancelarmos os múltiplos de 3 ; a partir de 5, exclusive, contamos de 5 em 5, para cancelarmos todos os múltiplos de 5 ....

Consideremos até o número primo, cujo quadrado, consta da sucessão escrita .

No caso considerado, não é necessário contarmos de 11 em 11, pois o quadrado de 11 é 121 e não consta da série considerada .

Temos :

1 , 2 , 3 , 5 , 7, ~~9~~, 11, 13, ~~15~~, 17, 19, ~~21~~, 23
~~25~~ , ~~27~~ , 29, 31, ~~33~~, ~~35~~, 37, ~~39~~, 41, 43, ~~45~~, 47 ,
~~49~~, ~~51~~, 53, ~~55~~, ~~57~~, 59, 61, ~~63~~, ~~65~~, 67, ~~69~~, 71,73,
~~75~~, ~~77~~, 79, ~~81~~, 83, ~~85~~, ~~87~~, 89, ~~91~~, ~~93~~, ~~95~~, 97,~~99~~,
101 .

e) Reconhecer se um número dado é primo

Para reconhecer se um número dado é primo, divide-se o número pela sucessão dos números primos à partir de 2, até que se obtenha um quociente menor que o divisor . Se nenhuma das divisões fôr exata, o número dado é primo .

Ex : Verificar se 191 é ou não primo .

Vejamos :

191 - por 2 não é divisível . Resto 1
por 3 " " " (1 + 9 + 1) = 11
por 5 " " " (termina em 1)
por 7 " " " (1 + 27 + 2) = 30
por 11 " " " (13 - 9) = 4

```
191 |_13___      191 |_17___
 61   14          21   11
  9                4
```

Nesta última divisão, o quociente é menor do que o divisor e a divisão não é exata, logo, podemos afirmar que 191 é primo.

2- DECOMPOSIÇÃO EM FATÔRES PRIMOS

a) Seja decompor 180 em fatôres primos. Temos :

```
180 |_2
 00  90 |_2
     10  45 |_3
      0  15  15 |_3
          0   0  5 |_5
                 0  1
```

Logo : $180 = 2 \times 90 = 2 \times 2 \times 45 = 2 \times 2 \times 3 \times 15 =$
$= 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = \underline{2^2 \times 3^2 \times 5}$

Na prática, usaremos o seguinte sistema :

180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$

b) Quais são os divisôres primos ?
c) Os divisôres primos de 180 são : 1, 2, 3 e 5
d) Quantos são os divisôres primos de 180 ?
- Os divisôres primos de 180 são 4 .

e) Quantos são os divisôres de 180 ?
- Um número, além dos divisôres primos, possue divisôres múltiplos . Há uma regra muito simples, que nos permite calcular o seu número.

Regra : " O número de divisôres de um número obtém-se, somando uma unidade aos expoentes de seus fatôres primos e multiplicando as somas obtidas " .

Temos : $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5^1$

$N.T. = (2 + 1).(2 + 1).(1 + 1)$

$= 3 \times 3 \times 2 = 18$

Quais são os divisôres de 180 ?

		1
180	2	2
90	2	4
45	3	3, 6, 12
15	3	9,18, 36
5	5	5,10,20,15,30,60
1		45,90,180

À direita de cada fator primo, escrevem-se os produtos que se obtém, multiplicando-o pelos divisôres escritos acima .

3- MÁXIMO DIVISOR COMUM (M.D.C.)

4- MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM (M.M.C.)

a) Seja dividir 35 por 7 .

Temos : múltiplo ⟶ 35 |_7_ ⟵ divisor
0 5

35 contém 7, um número inteiro de vêzes (5). 7 está contido um número inteiro de vêzes em 35 (5) .

Há um processo muito importante, para determinar o M.D.C. e o M.M.C.

O processo geral ou da decomposição em fatores primos é o seguinte :

– " O máximo divisor comum de dois ou mais números dados, é o maior número que está contido, um número inteiro de vêzes no número dado".

– " O máximo, é no máximo igual ao menor dos números " .

– " O mínimo múltiplo comum de dois ou mais números dados, é o menor número que contém um número inteiro de vêzes, os números dados !

– " O mínimo , é no mínimo igual ao maior dos números " .

b) PROCESSO GERAL

Temos : 180 - 270 - 540 - 840

180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

270	2
135	3
45	3
15	3
5	5
1	

540	2
270	2
135	3
45	3
15	3
5	5
1	

840	2
420	2
210	2
105	3
35	5
7	7
1	

Temos : $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$

$270 = 2 \times 3^3 \times 5$

$540 = 2^2 \times 3^3 \times 5$

$840 = 2^3 \times 3 \times 5 \times 7$

– O máximo divisor comum é igual ao produto dos fatores primos comuns, com os menores expoentes .

M.D.C. $= 2 \times 3 \times 5 = 30$

– O mínimo múltiplo comum é igual ao produto dos fatores comuns e não comuns, com os maiores expoentes .

M.M.C. $= 2^3 \times 3^3 \times 5 \times 7 = 7.560$

c) ALGORÍTMO DE EUCLIDES OU DIVISÕES SUCESSIVAS

É um processo particular para a determinação do M.D.C.

REGRA : "Para obter-se o M.D.C. de dois números, divide-se o maior pelo menor . Se o resto encontrado fôr zero (0) , o menor dos números dados é o M.D.C. de ambos. Se não o fôr, divide-se o divisor pelo resto, procedendo-se nessa divisão, como na primeira ."

Continua-se a operação do mesmo modo, até que se chegue a um resto igual a zero. O último divisor nêste caso, é o M.D.C. procurado .

Ex : Achar o M.D.C. dos números : 660 e 462

Quociente ⟶	1	2	3
Divisores ⟶ 660	462	198	66
Restos ⟶ 198	66	00	

M.D.C. = 66

Na prática, é muitas vêzes necessário determinar os quocientes dos números dados, pelo MDC.

Teremos :

$660 \div 66 = 10$, resto 0 $\qquad$ $462 \div 66 = 7$, resto 0

Poderemos evitar essas divisões, aproveitando o algorítmo de Euclides .

	1	2	3
660	462	198	66
198	66	00	
10	7	3	1

REGRA : " Para achar os quocientes que resultam da divisão de dois números, pelo seu máximo divisor comum, sem fazer as divisões, escreve-

-se por baixo do M.D.C., a unidade . À esquerda da
da unidade, o último quociente obtido ;
Os outros valores são obtidos, pelo produ-
to do último resultado pelo quociente, escrito por
cima, somado com o valor precedente .

$$7 = 3 \times 2 + 1$$

$$10 = 7 \times 1 + 3$$

c) DECOMPOSIÇÃO CONJUNTA (M.M.C.)

1) Processo francês

80, 36, 250	2
40, 18, 125	2
20, 9, 125	2
10, 9, 125	2
5, 9, 125	3
5, 3, 125	3
5, 1, 125	5
1, 1, 25	5
1, 1, 5	5
1, 1, 1	

Temos : M.M.C. = $2^4 \times 3^2 \times 5^3$

2) Processo alemão

80, 36, 250	2
40, 18, 125	2
20, 9, 125	5
4, 9, 25	

Temos :

M.M.C. = $2^2 \times 5 \times 4 \times 9 \times 25 = 2^4 \times 3^2 \times 5^3$

E X E R C Í C I O S

1- Verificar se os seguintes números são primos :
197, 321, 637, 187 .
2- Decompôr em fatôres primos : 270, 576, 680, 315
3- Achar os fatôres primos comuns aos números :

108 e 660 .
4- Achar os divisores comuns dos números seguintes
: 150 e 315 .
5- Dado o número 360, determinar :
a) Seus divisores primos .
b) O número total de divisores .
c) Todos os seus divisores .

6- Determinar o M.D.C. de : 2046, 2511 e 2790.

7- Determinar o M.M.C. de : 36, 51 e 90 .

8- Dadas duas tábuas de 36 metros e 48 metros de comprimento ; dividí-las em pedaços iguais e de maior comprimento possível . Qual será o comprimento da cada pedaço ?
Resp : 12 metros .

9- Três viajantes seguiram para Brasília. O mais jovem viaja com o mesmo destino de 15 em 15 dias . O segundo de 20 em 20 dias e o mais velho de 24 em 24 dias . Daquí a quantos dias viajarão novamente juntos ?

Resp :120 dias .

§§§§§§§§§§§§§§§§§§

XI - F R A Ç Õ E S

1- ORIGEM

A origem das frações ordinárias é muito remota. Os babilônios, egípcios e gregos deixaram provas de que conheciam as frações. Quando Juan de Luna traduziu para o latim, no século XII, a aritmética de Al-Karismi, empregou fractio para traduzir a palavra árabe: alkasr, que significa quebrar, romper. Este uso se generalizou junto com a forma ruptus, que Leonardo de Pisa preferia.

Os números fracionários tiveram sua origem nas medidas. Os babilônios utilizavam como denominador o sessenta. Os egípcios empregavam a unidade como numerador. Para representar 7/8, escreviam: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$.

Os gregos marcavam o numerador com um acento e o denominador com dois; ou colocavam o denominador como um expoente. Hiparco introduziu

frações babilônicas na Astrologia grega .

As regras para a resolução das operações com números fracionários, datam da época de : Aryabhata,(século VI) e Bramagupta (século VII) anos depois de Cristo .

No estudo mais amplo e sistemático das operações com frações, ofereceram também os indús : Mahavira (século IX) e Bhaskara (século XII).As di tas regras são as mesmas que se empregam atualmente.

Nas numerosas inscrições egípcias decifradas, se encontram variadíssimos problemas de frações. Com seu peculiar sistema de frações com a unidade como numerador, resolviam os problemas da vida diária, tais como : a distribuição de pão, as medidas de terra, a construção das pirâmides, etc . Alguns dos problemas apresentados no papiro de Ahmés, têm ainda atualidade .

2- <u>CONCEITO: Nomenclatura e simbolização</u>

O vocábulo <u>fração</u>, na linguagem vulgar, significa a parte da unidade .

Uma porção qualquer de um todo pode ser pois, em geral, representada por uma fração dêsse todo .

Vejamos porém, no campo da Matemática, como surgiu o conceito de fração .

—Para atender aos múltiplos problemas de medida, os matemáticos viram-se obrigados a ampliar o campo numérico e criar novos símbolos, com os quais fôsse possível representar uma parte qualquer da unidade. As quantidades <u>descontínuas</u> ou pluralidades, como os livros de uma estante, são constituídas por elementos separados uns dos outros .

As quantidades <u>contínuas</u>, como o comprimento de uma estrada, constituem um todo, cujos elementos não estão naturalmente separados entre si.

As medições das quantidades contínuas e as divisões inexatas, provocaram a ampliação do campo dos números, com a introdução dos números fracionários .

a) CONCEITO

Para medir uma quantidade contínua, como o comprimento do segmento A ______ B, se escolhe um comprimento qualquer, por exemplo: o comprimento C____D, como unidade de medida e esta é a unidade principal .

Para realizar a medida, transportamos o segmento CD, consecutivamente sôbre o segmento AB, a partir de um dos extremos e encontramos que, o segmento AB, contém duas vêzes exatamente o segmento CD, ou seja, que a medida do segmento AB, é 2 vêzes a unidade principal (o segmento CD). Mas, nem sempre sucede que a unidade principal está contida um número exato de vêzes na quantidade que se mede .

Assim, por exemplo, se quisermos medir o comprimento do segmento NM : N______P_M sendo a unidade principal o segmento : C___D, encontramos ao transportar <u>CD</u> sôbre <u>NM</u>, que êste contém três vêzes a unidade CD e sobra o segmento <u>PM</u>. Então, tomamos como unidade de medida, <u>a metade de CD</u> (unidade secundária) e levando-a sôbre NM, à partir do extremo N, vemos que está contida 7 vêzes exatamente sôbre <u>NM</u>.

Então dizemos que a medida do segmento NM, é sete vêzes a metade do segmento CD, ou seja: $\frac{7}{2}$ de CD.

Temos : C_._D N_._._._._._._P_M

Como se observa, há necessidade de introduzir um novo número, o número fracionário $\frac{7}{2}$ no qual o 2 (-denominador) indica que a unidade principal que é o comprimento de CD, se divide em duas partes iguais, e o 7 (numerador), que NM contém sete destas partes .

Do mesmo modo, se quisermos medir o comprimento do segmento EF, sendo CD a unidade principal, não encontraremos ao transportar CD sôbre EF , que êste segmento é menor do que a unidade principal CD

C D E F C D

Dividindo-se CD em duas partes, a sua parte ainda é maior do que EF.

Dividindo-se CD em três partes, vemos então que a sua terça parte é igual a EF.

Portanto, podemos dizer que EF é $\frac{1}{3}$ de CD.

Outra necessidade do emprêgo dos números fracionários, temos nas divisões inexatas.

A divisão exata, nem sempre é possível, porque muitas vêzes, não existe nenhum número inteiro que multiplicado pelo divisor, dê o dividendo.

Assim, a divisão de 3 por 5 não é exata, porque não há nenhum número inteiro, que multiplicado por 5, dê 3.

Então, como exprimir o quociente exato de 3 por 5?

Dado um disco, vamos dividí-lo em 6 partes e consideraremos o conjunto, formado por 4 destas partes.

Representaremos simbòlicamente a fração por um par de números separados por um traço.

$\frac{4}{6}$ ← numerador ← denominador

No comércio, é usual separar o numerador do denominador, por um traço inclinado: 4/6.

COMO SE LER UMA FRAÇÃO:

Enuncia-se o numerador e em seguida o denominador, seguido da palavra: avos.

Ex: As frações: $\frac{13}{17}$ $\frac{20}{130}$ $\frac{9}{27}$ são lidas assim:

treze, dezessete avos
vinte, cento e trinta avos
nove, vinte e sete avos.

Excetuam-se as frações que tiverem para denominador 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ou 10, ou qualquer potência de 10, a saber: 100, 1000, 10000 etc.

As frações que apresentarem êsses denominadores, são lidas:

$\frac{1}{2}$	um meio	$\frac{1}{4}$	um quarto
$\frac{1}{3}$	um terço	$\frac{1}{5}$	um quinto
$\frac{1}{6}$	um sexto	$\frac{1}{10}$	um décimo
$\frac{1}{7}$	um sétimo	$\frac{1}{100}$	um centésimo
$\frac{1}{8}$	um oitavo	$\frac{1}{1000}$	um milésimo
$\frac{1}{9}$	um nono	$\frac{1}{10000}$	um décimo milésimo.

Quando a unidade é dividida em 12 partes iguais (caso de denominador 12), cada uma destas partes é denominada: um duodécimo da unidade.

NOTA:

Quando um dos têrmos da fração fôr representado por uma expressão qualquer à calcular-se, e não por um simples número, lê-se o numerador acompanhado da preposição Sôbre e, a seguir, o denominador.

Ex: A fração $\frac{17 - 6}{9}$, deve ser lida assim:

- dezessete menos seis, sôbre nove.

A fração $\frac{15}{7^3}$, deve ser lida:

- quinze sôbre sete ao cubo.

A fração $\frac{11}{8 \times 9}$, deve ser lida:

- onze sôbre oito vêzes nove.

Esta mesma regra pode ser aliás, aplicada a qualquer fração.

E' de uso empregá-la, quando um dos têrmos (ou mesmo os dois), são representados por números exces

...ivamente grandes.

...: a fração $\frac{15800}{7}$ deve ser lida :

= quinze mil e oitocentos sôbre sete.

Essa mesma regra é aplicada para o caso que o denominador da fração é 1.

Ex.: $\frac{9}{1}$ (lê-se : nove sôbre um)

3- PROPRIEDADES

1) MULTIPLICANDO-SE OU DIVIDINDO-SE O NUMERADOR DE UMA FRAÇÃO POR UM NÚMERO, sem variar o denominador, a fração ficará dividida ou multiplicada pelo mesmo número :

a) Multiplicando-se o numerador de uma fração por um número, sem variar o denominador, a fração fica multiplicada por êsse número.
Seja a fração : $\frac{3}{4}$

Multiplicando-se o numerador por 3, teremos:
$\frac{9}{4}$.

Fácil é perceber, que a fração ficou multipli-

cada também por 3.

Por outro lado, já sabemos que a fração representa o quociente de uma divisão na qual, o numerador é o dividendo e o denominador é o divisor.

Ora, se o dividendo numa divisão, é multiplicado por um número, o quociente fica multiplicado por êste dito número. Logo, ao multiplicar o numerador que é o dividendo por um número, a fração que é o quociente, ficará multiplicada pelo mesmo número.

b) Dividindo-se o numerador de uma fração por um número, sem variar o denominador, a fração fica dividida por êste número.
Seja a fração : $\frac{6}{8}$

Unidade principal →

Dividindo-se o numerador por 3, teremos :

$\frac{6 : 3}{8} = \frac{2}{8}$

É fácil concluir que, a fração também ficou dividida por 3.

Por outro lado, já sabemos que a fração representa o quociente de uma divisão, na qual o numerador é o dividendo e o denominador, o divisor.

Portanto, se o dividendo de uma divisão de divide por um número, o quociente fica dividido por êste dito número. A fração que é o quociente, ficará dividida pelo mesmo número.

2) MULTIPLICANDO-SE OU DIVIDINDO-SE O DENOMINADOR DE UMA FRAÇÃO POR UM NÚMERO, sem variar o numerador, a fração ficará dividida no primeiro ca-

ro é multiplicada no segundo caso, pelo mesmo número .

Estudemos os dois casos separadamente :

a) multiplicando-se o denominador de uma fração por um número, sem variar o numerador, a fração ficará dividida pelo mesmo número .

Seja a fração : $\frac{3}{8}$

Multiplicando-se o denominador por 2, teremos :

$$\frac{3}{8 \times 2} = \frac{3}{16}$$

Quer dizer que, consideraremos 3 partes da unidade principal, dividida em 16 partes .

É fácil constatar que , a fração ficou dividida por 2 .

$\frac{3}{16} \rightarrow$

Já sabemos que, " quando se multiplica o divisor, o quociente fica dividido " ; logo, ao multiplicar o denominador que é o divisor, por um número a fração que é o quociente, ficará dividida por êste número .

b) Dividindo-se o denominador de uma fração por um número, sem variar o numerador, a fração ficará multiplicada pelo mesmo número .

Seja a fração : $\frac{3}{8}$

$\frac{3}{8} \rightarrow$

Dividindo-se o denominador por 2, teremos :

$$\frac{3}{8 : 2} = \frac{3}{4}$$

A unidade principal agora, será dividida apenas em 4 partes e consideraremos 3 dessas partes .

$\frac{3}{4}$

É fácil concluir que a fração, ficará multiplicada por 2. Por outro lado, já sabemos que : " quando divide-se o divisor, o quociente fica multiplicado". Logo, ao dividir o denominador, que é o divisor, por um número, a fração que é o quociente, ficará multiplicada por êste número .

3) MULTIPLICANDO-SE OU DIVIDINDO-SE AMBOS OS TERMOS DE UMA FRAÇÃO, POR UM MESMO NÚMERO, O VALOR DA FRAÇÃO , NÃO SE ALTERA :

$\frac{1}{2}$ $\frac{2}{4}$ $\frac{4}{8}$ $\frac{8}{16}$

Foram distribuidas quatro maçãs, perfeitamente iguais, a quatro meninos .

O 1º dividiu a sua maçã em 2 partes e comeu a metade .

O 2º dividiu a sua maçã em 4 partes e comeu duas partes .

O 3º em 8 partes e comeu 4 partes .

O 4º finalmente, dividiu em 16 partes e comeu oito partes .

Pergunta-se : Quem comeu mais maçã ?

Ràcilmente constataremos, que todos comeram a mesma quantidade. Logo, podemos escrever :

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8} = \frac{8}{16} \quad \text{ou}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \times 2}{2 \times 2} = \frac{1 \times 4}{2 \times 4} = \frac{1 \times 8}{2 \times 8}$$

O que mostra claramente que, dividindo-se os dois têrmos de uma fração por um mesmo número, o seu valor não se altera.

Por outro lado, aplicando as duas primeiras propriedades, chegaremos à mesma conclusão.

Com efeito : Ao multiplicar o numerador por um número, a fração fica multiplicada por êsse mesmo número, mas, ao multiplicar o denominador pelo dito número, a fração fica dividida pelo mesmo número. Logo, a fração não varia.

Do mesmo modo, ao dividir o numerador por um número, a fração fica dividida pelo dito número, e a fração fica multiplicada pelo mesmo número, quando dividimos o denominador pelo mesmo número.

4- CLASSIFICAÇÃO DAS FRAÇÕES

ORDINÁRIAS
- a) Própria
- b) Imprópria
- c) Redutível
- d) Irredutivel
- e) Aparente

DECIMAIS
- a) Própria
- b) Imprópria
- c) Redutível
- d) Irredutivel
- e) Aparente

FRAÇÕES ORDINÁRIAS

É aquela que possue o denominador diferente de 10 ou potência de 10.

Ex : $\frac{3}{17}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{12}{36}$, $\frac{7}{7}$

a) Própria - é a que possue o numerador menor que o denominador.

Ex: $\frac{7}{9}$, $\frac{8}{11}$, $\frac{3}{6}$

b) Imprópria - é a que possue o numerador maior do que o denominador.

Ex : $\frac{7}{5}$, $\frac{9}{4}$, $\frac{11}{8}$

c) Redutivel - é aquela cujos têrmos possuem um divisor comum diferente da unidade.

Ex : $\frac{12}{16}$, $\frac{15}{45}$, $\frac{12}{28}$

$\frac{12}{16}$ os têrmos são divisiveis por 4

Temos : $\frac{12 : 4}{16 : 4} = \frac{3}{4}$

$\frac{15}{45}$ os têrmos são divisiveis por 5 .

Temos : $\frac{15 : 5}{45 : 5} = \frac{3}{9}$

$\frac{12}{28}$ os têrmos são divisiveis por 4 .

Temos : $\frac{12 : 4}{28 : 4} = \frac{3}{7}$

d) Irredutivel - é aquela cujos têrmos têm apenas para divisor comum , a unidade .

Ex : $\frac{3}{5}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{12}{17}$

e) Aparente - é aquela em que os têrmos são iguais , ou o numerador é múltiplo do denominador .

Ex : $\frac{7}{7}$, $\frac{12}{4}$, $\frac{15}{3}$

FRAÇÃO DECIMAL

É aquela cujo denominador é 10 ou potência de 10 .

Ex : $\frac{3}{10}$, $\frac{8}{100}$, $\frac{218}{1000}$

a) Própria - é a que possue o numerador menor do que o denominador .

Ex : $\frac{7}{10}$, $\frac{12}{100}$, $\frac{25}{1000}$

b) Imprópria - é a que possue o numerador , maior do que o denominador .

Ex : $\frac{15}{10}$, $\frac{148}{100}$, $\frac{2645}{1000}$

c) Redutível - é aquela cujos têrmos possuem divisor comum, diferente da unidade.

Ex : $\frac{8}{10}$, $\frac{36}{100}$

$\frac{8}{10}$ os têrmos são divisiveis por 2 .

Temos : $\frac{8 : 2}{10 : 2} = \frac{4}{5}$

$\frac{36}{100}$ os têrmos são divisiveis por 4 .

Temos : $\frac{36 : 4}{100 : 4} = \frac{9}{25}$

d) Irredutível - é aquela cujos têrmos têm apenas para divisor comum, a unidade .

Ex : $\frac{9}{10}$, $\frac{13}{100}$, $\frac{71}{1000}$

e) Aparente - é aquela cujo denominador é múltiplo ou igual ao denominador .

Ex : $\frac{20}{10}$, $\frac{300}{100}$, $\frac{10}{10}$

5- TRANSFORMAÇÃO DE NÚMERO MISTO EM FRAÇÃO IMPRÓPRIA E VICE- VERSA .

Admitamos o comprimento AB, que vamos medir com a unidade CD .

A ________ E ____ B   C ____ D

Observamos que : $\overline{AB}$ contém $\overline{CD}$ três vêzes, mais o comprimento $\overline{EB}$.

Portanto, necessitamos determinar uma parte alíquota da unidade principal $\overline{CD}$, que possa ser aplicada um número inteiro de vêzes em $\overline{EB}$.

Consideremos a metade de $\overline{CD}$.

Teremos então : A ,_,_,_,_,_,_,_, B

Portanto : $\overline{AB} = \frac{7}{2}$ de $\overline{CD}$ ou

$\overline{AB} = 3\frac{1}{2}$ de $\overline{CD}$. Logo: $\boxed{\frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}}$

a) REGRA :

Para transformar uma fração imprópria em número misto, divide-se o numerador pelo denominador. Se o quociente é exato, êste representa os inteiros ; Se o quociente não é exato, acrescenta-se ao inteiro, uma fração que tenha por numerador o resto e por denominador o divisor .

Ex : $\frac{28}{13} = 2\frac{2}{13}$

28 |13 ← denominador

numerador → 2 2 ← parte inteira

b) REGRA :

Para transformar um número misto em fração imprópria, multiplica-se o inteiro pelo denominador e adiciona-se o produto ao numerador e considera-se o mesmo denominador .

Ex : $3\frac{5}{7} = \frac{3 \times 7 + 5}{7} = \frac{26}{7}$

6- SIMPLIFICAÇÃO

a) SIMPLIFICAÇÃO DE FRAÇÕES

Simplificar uma fração : é convertê-la noutra fração equivalente, cujos têrmos sejam menores .

De acôrdo com a propriedade que diz : " Dividindo-se ambos os têrmos de uma fração por um mesmo número, ela não se altera " . Podemos estabelecer a regra prática :

Para simplificar uma fração dividem-se ambos os têrmos , pelo seu M.D.C.

Ex : $\frac{528}{1078} = \frac{24}{49}$

1078	2 528	24 22
22	088	
	0	
49	24	1

b) SIMPLIFICAÇÃO DE EXPRESSÕES COMPOSTAS

Para simplificar expressões fracionárias, cujo numerador seja um produto indicado e seu denominador outro produto indicado, divide-se os fatôres do numerador e denominador por seus fatôres comuns, até que não haja fatôres comuns ao numerador e denominador.

Ex : Simplificar : $\dfrac{12 \times 10 \times 35}{16 \times 14 \times 21}$

Teremos :

$$\frac{\overset{1}{\cancel{\overset{3}{\cancel{12}}}} \times \overset{5}{\cancel{10}} \times \overset{5}{\cancel{35}}}{\underset{4}{\cancel{16}} \times \underset{7}{\cancel{14}} \times \underset{\underset{1}{\cancel{3}}}{\cancel{21}}} =$$

$$= \frac{1 \times 5 \times 5}{4 \times 7 \times 1} = \frac{25}{28}$$

7- REDUÇÃO DE FRAÇÃO AO MESMO DENOMINADOR

Sejam as frações : $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{3}$

Para reduzir as frações ao mesmo denominador, necessitamos dividir a unidade num número de partes tal, que seja múltiplo de 2 e 3. É evidente

que, procuramos o menor múltiplo .
M.D.C. = 6

$\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$

$\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$

Temos finalmente : $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$. Reduzidos ao mesmo denominador : $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{6}$.

Logo, podemos estabelecer a seguinte regra prática :

" Simplificam-se as frações dadas. Feito isso, determina-se o M.M.C. dos denominadores e êste será o denominador comum .

Para achar os numeradores, divide-se o M.M.C. por cada denominador e o quociente pelo numerador respectivo (o quociente multiplica-se pelo numerador respectivo) .

Ex : $\frac{14}{16}$, $\frac{15}{18}$, $\frac{21}{35}$ Simplificando-se

$\frac{7}{8}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{5}$ M.M.C. $2^3 \times 3 \times 5 = 120$

Temos : $\frac{105}{120}$, $\frac{100}{120}$, $\frac{72}{120}$

8- COMPARAÇÃO

a) Fração de mesmo numerador
b) Fração de mesmo denominador
c) Frações de numeradores e denominadores diferentes
d) Frações que diferem da unidade de quantidades fracionárias de mesmo denominador .

a) FRAÇÃO DE MESMO NUMERADOR

Ex : $\frac{5}{6}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{5}{4}$

$\frac{5}{6}$ $\frac{5}{2}$ $\frac{5}{4}$

Observando, podemos constatar imediatamente, que a maior é $\frac{5}{2}$ e então concluir-se :

" De frações de mesmo numerador, é a maior a que tiver menor denominador ."

Logo, $\frac{5}{2} > \frac{5}{4} > \frac{5}{6}$

b) FRAÇÃO DE MESMO DENOMINADOR

Ex : $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{2}{8}$

$\frac{3}{8}$

$\frac{5}{8}$

$\frac{2}{8}$

Observando, podemos constatar imediatamente que a maior é $\frac{5}{8}$ e então concluir-se :

" De frações de mesmo denominador, é a maior, a que tiver maior numerador " .

Logo : $\frac{5}{8} > \frac{3}{8} > \frac{2}{8}$

c) NUMERADORES E DENOMINADORES DIFERENTES

Ex : $\frac{3}{7}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{4}{35}$

Podemos fazer recair num dos dois primeiros casos :

1- Reduzindo ao mesmo denominador

$\frac{3}{7}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{4}{35}$ $\frac{15}{35}$, $\frac{14}{35}$, $\frac{4}{35}$

Logo : $\frac{3}{7} > \frac{2}{5} > \frac{4}{35}$

2- Reduzindo ao mesmo numerador

$\frac{3}{7}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{4}{35}$ $\frac{12}{28}$, $\frac{12}{30}$, $\frac{12}{105}$

Logo : $\frac{3}{7} > \frac{2}{5} > \frac{4}{35}$

d) FRAÇÕES QUE DIFEREM DA UNIDADE, DE QUANTIDADES FRACIONÁRIAS DE MESMO NUMERADOR .

$\frac{4}{7}$, $\frac{8}{11}$, $\frac{5}{8}$

$\frac{4}{7}$ para a unidade faltam $\frac{3}{7}$

$\frac{8}{11}$ para a unidade faltam $\frac{3}{11}$

$\frac{5}{8}$ para a unidade faltam $\frac{3}{8}$

Portanto, a que falta menos para a unidade, é a maior .

$\frac{3}{7} > \frac{3}{8} > \frac{3}{11}$

$$\boxed{\frac{8}{11} > \frac{5}{8} > \frac{4}{7}}$$

O P E R A Ç Õ E S

9 - A D I Ç Ã O

Vejamos os seguintes casos :

a) Número inteiro + fração

Ex : $3 + \frac{2}{7}$ Basta suprimir o sinal (+)

Teremos então : $3\frac{2}{7}$. Ou então multiplica-se o número inteiro pelo denominador da fração, adiciona-se ao resultado o numerador e conserva-se o denominador .

$$3 + \frac{2}{7} = \frac{3 \times 7 + 2}{7} = \frac{23}{7}$$

b) Fração + número inteiro

Ex : $\frac{5}{8} + 2 = 2\frac{5}{8} = \frac{21}{8}$

c) Fração + Fração

Temos dois casos a considerar :

1- Mesmo denominador

Ex : $\frac{2}{7} + \frac{5}{7} + \frac{1}{7}$ "Adicionam-se os numeradores e dá-se o mesmo denominador ."

$$\frac{2}{7} + \frac{5}{7} + \frac{1}{7} = \frac{8}{7} = 1\frac{1}{7}$$

2- Denominadores diferentes

Ex: $\frac{3}{8} + \frac{5}{12} + \frac{4}{9}$ Faz-se recair no primeiro caso, reduzindo-se as frações ao mesmo denominador .

Teremos então :

$$\frac{3}{8} + \frac{5}{12} + \frac{4}{9} = \frac{27 + 30 + 32}{72} = \frac{89}{72} = 1\frac{17}{72}$$

d) Número misto + Número misto

1- Número misto de mesmo denominador

Ex: $3\frac{2}{5} + 2\frac{3}{5} + 1\frac{4}{5} = 6\frac{9}{5} = 7\frac{4}{5}$

" Somam-se as partes inteiras, juntando-se ao total obtido, os inteiros encontrados na soma das frações ".

2- Número misto de denominadores diferentes .

Ex: $2\frac{3}{8} + 1\frac{3}{5} + 3\frac{2}{3} =$

$$= 6\frac{45 + 72 + 80}{120} = 6\frac{197}{120} = 7\frac{77}{120}$$

10- S U B T R A Ç Ã O

a) Número inteiro menos (-) Fração.

Ex: $12 - \frac{3}{4} = 11\frac{1}{4}$ → (4 - 3) ; (12 - 1)

Justificativa :

$$12 - \frac{3}{4} = 11 + 1 - \frac{3}{4} = 11 + \frac{4}{4} - \frac{3}{4} = 11 + \frac{4 - 3}{4} = 11\frac{1}{4}$$

Ou então multiplica-se a parte inteira pelo denominador e do resultado subtrai-se o numerador, conservando-se o mesmo denominador .

$$12 - \frac{3}{4} = \frac{12 \times 4 - 3}{4} = \frac{45}{4} = 11\frac{1}{4}$$

b) Fração - (menos) Fração

1- Mesmo denominador

Ex: $\frac{7}{4} - \frac{2}{4} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$

Determina-se a diferença entre os numeradores e dá-se ao resultado o mesmo denominador.

2- Denominadores diferentes

Ex: $\frac{3}{4} - \frac{8}{11} =$ Reduzem-se as frações ao mesmo denominador, para recair no 1º caso

$$\frac{3}{4} - \frac{8}{11} = \frac{33 - 32}{44} = \frac{1}{44}$$

c) Número inteiro menos Número misto

Ex: $8 - 3\frac{2}{3} = 4\frac{1}{3}$

$$8 - \left(3 + \frac{2}{3}\right) = (8 - 3) - \frac{2}{3} =$$
$$= 5 - \frac{2}{3} = 4\frac{1}{3}$$

d) Número misto menos Número inteiro

Ex: $9\frac{3}{4} - 5 = 4\frac{3}{4}$

Justificativa :

$$\left(9 + \frac{3}{4}\right) - 5 = (9 - 5) + \frac{3}{4}$$
$$= 4 + \frac{3}{4} = 4\frac{3}{4}$$

e) Número misto menos Número misto

1- Mesmo denominador

Ex: $5\frac{3}{4} - 3\frac{2}{4} = 2\frac{1}{4}$

$$5\frac{2}{7} - 3\frac{6}{7} = 4\frac{9}{7} - 3\frac{6}{7} =$$
$$= 1\frac{3}{7}$$

2- Denominadores diferentes

Ex: $7\frac{3}{4} - 3\frac{5}{8} = 4\frac{6 - 5}{8} =$

$$= 4\frac{1}{8}$$

$$5\frac{2}{3} - 2\frac{4}{5} = 4\frac{5}{3} - 2\frac{4}{5} =$$
$$= 2\frac{25 - 12}{15} = 2\frac{13}{15}$$

11 - MULTIPLICAÇÃO

a) Número inteiro x Fração

Exs: $3 \times \frac{2}{5} = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$ ← Número inteiro e denominador, primos entre si

$3 \times \frac{2}{\not{9}_{3}} = \frac{2}{3}$ ← Número inteiro, divisor do denominador.

${}^{2}\not{6} \times \frac{2}{\not{3}_{1}} = 4$ ← Número inteiro, múltiplo do denominador.

b) Fração x Número inteiro

Ex: $\frac{5}{7} \times 2 = \frac{10}{7} = 1\frac{3}{7}$

$\frac{3}{8} \times 4 = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$

$\frac{2}{3} \times 15 = 6$

c) Fração x Fração

Ex: $\frac{3}{5} \times \frac{4}{7}$ ou podemos dizer:

$\frac{3}{5}$ de $\frac{4}{7}$. Portanto, vamos tomar $\frac{3}{5}$ de $\frac{4}{7}$.

Necessitamos dividir $\frac{4}{7}$ em 5 partes; Ora, já aprendemos que, multiplicando-se o denominador por um certo número, o valor da fração fica dividido por êsse número, logo:

$$\frac{4}{7 \times 5} = \frac{4}{35}$$

Vamos considerar o tríplo disto, logo:

$3 \times \frac{4}{35} = \frac{12}{35}$ então $\frac{3}{5}$ de $\frac{4}{7} = \frac{12}{35}$

Podemos estabelecer a regra prática:

" Para multiplicar frações, multiplicam-se os numeradores e os denominadores."

OBSERVAÇÃO: Se fôr possível simplificar, devemos fazer a simplificação, antes da multiplicação.

Ex: $\frac{12}{35} \times \frac{21}{18} = \frac{2}{5}$

$\frac{3}{5}$ de $\frac{4}{7}$

ou

$\frac{3}{5} \times \frac{4}{7} = \frac{12}{35}$

d) Número Misto x Número Misto

Ex: $3\frac{2}{5} \times 4\frac{3}{7} = \frac{17}{5} \times \frac{31}{7} = \frac{527}{35} = 15\frac{2}{35}$

Regra: Reduzem-se os números mistos à frações impróprias, para recair no caso precedente.

12- DIVISÃO

Antes de estabelecer o conceito de divisão de frações, vejamos o conceito de frações inversas.

Consideremos duas barras, uma de 3 cm e outra de 5 cm.

Vamos medir a barra amarela, tomando a verde-

claro como unidade . Teremos :

verde claro

← amarelo →

Sobrou ainda um pedaço da barra amarela , que não pode ser medida com a barra verde claro.

Necessitamos então dividir a barra verde claro em partes, de tal modo, que uma destas partes possa ficar contida um número inteiro de vêzes, no pedaço da barra amarela, que não foi coberta .

Dividindo-se a barra verde claro em três partes, observamos que a sua terça parte fica contida, um número inteiro de vêzes no pedaço amarelo .

Portanto, podemos concluir que a barra amarela é igual a $\frac{5}{3}$ da barra verde claro.

Agora, se medirmos a verde claro, tomando a amarela como unidade , temos :

verde claro

← amarela

A barra amarela é maior do que a verde claro .

Necessitamos dividir aquela em partes, de tal modo, que uma destas partes possa ser aplicada um número inteiro de vêzes na barra verde claro .

Dividindo-se a amarela em cinco partes, observamos que $\frac{1}{5}$ (um quinto)da amarela, pode ser aplicada exatamente três vêzes na barra verde claro. Logo, a verde claro é três quintos da amarela .

Amarela $= \frac{5}{3}$ da verde claro

Verde claro $= \frac{3}{5}$ da amarela

As frações $\frac{5}{3}$ e $\frac{3}{5}$, são chamadas de : frações inversas . O produto de duas frações inversas a que é igual ? Calculemos :

$\frac{3}{4} \times \frac{4}{3} = \frac{3}{4}$ de $\frac{4}{3}$

$\frac{3}{4}$ de $\frac{4}{3}$

Podemos concluir :

$$\boxed{\frac{3}{4} \times \frac{4}{3} = 1}$$

Portanto, o produto de duas frações inversas é igual à unidade .

Seja agora calcular : $\frac{5}{7} \div \frac{3}{8} = ?$

Vamos representar a fração quociente por $\frac{a}{b}$

Logo : $\frac{5}{7} \div \frac{3}{8} = \frac{a}{b}$

De acôrdo com a propriedade fundamental da divisão : " o dividendo é igual ao produto do quociente pelo divisor " , podemos escrever :

$\frac{5}{7} = \frac{a}{b} \times \frac{3}{8}$ Portanto, $\frac{a}{b}$ deve ser uma fração que, multiplicada por $\frac{3}{8}$ dê $\frac{5}{7}$.

Se multiplicarmos $\frac{3}{8}$ pela sua inversa $\frac{8}{3}$, nos obteremos 1 (um), que multiplicado por $\frac{5}{7}$ nos fornece $\frac{5}{7}$, logo : $\frac{a}{b} = \frac{5}{7} \times \frac{8}{3}$. Então : quocientes

$$\frac{5}{7} : \frac{3}{8} = \frac{5}{7} \times \frac{8}{3}$$

Daí a regra : - " Para dividir duas frações, multiplica-se a fração dividendo pelo inverso da

fração divisora ."

Podemos estabelecer o conceito da divisão, sob outra forma :

Consideremos o seguinte problema : 120 kg de papel valem Cr $ 2.400,00. Quanto custa um quilo ?

Pergunta-se qual dêstes dois dados será o dividendo e qual o divisor, ao determinar a solução ?

Escreve-se : 2.400 ÷ 120

Vejamos agora os seguintes problemas :

a) Uma barra de sabão de $\frac{2}{5}$ de quilo, vale $\frac{9}{4}$ do cruzeiro. Quanto vale o quilo ?

Temos : $\frac{9}{4} \div \frac{2}{5} = ?$

Se a barra é os $\frac{2}{5}$ do quilo; o quilo é os $\frac{5}{2}$ da barra e o problema pode enunciar-se como um problema de multiplicação .

Uma barra de sabão vale : $\frac{9}{4}$ do cruzeiro; quanto vale os $\frac{5}{2}$ da barra ?

$\frac{9}{4} \times \frac{5}{2}$, logo :

$$\boxed{\frac{9}{4} \div \frac{2}{5} = \frac{9}{4} \times \frac{5}{2}}$$

b) Uma peça de fazenda de $\frac{4}{5}$ do metro, vale p cruzeiros . Quanto vale um metro de fazenda ?

Operação a efetuar : $p \div \frac{4}{5}$

Raciocínio : Se a peça mede 4/5 do metro, o metro mede 5/4 da peça e vale portanto :

$p \times \frac{5}{4}$

Portanto : $\boxed{p \div \frac{4}{5} = p \times \frac{5}{4}}$

Vejamos os seguintes casos da divisão :

a) <u>Número inteiro ÷ por Fração</u>

Ex: $3 \div \frac{5}{4} = 3 \times \frac{4}{5} = \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}$

<u>Regra</u> : Multiplica-se o número inteiro pelo inverso da fração .

b) <u>Fração ÷ por Número inteiro</u>

Ex : $\frac{7}{8} \div 5 = \frac{7}{8} \times \frac{1}{5} = \frac{7}{40}$

<u>Regra</u> : Multiplica-se a fração pelo inverso do número .

c) <u>Fração ÷ Fração</u>

Ex : $\frac{5}{7} \div \frac{3}{8} = \frac{5}{7} \times \frac{8}{3} = \frac{40}{21} = 1\frac{19}{21}$

<u>Regra</u> : Multiplica-se a fração dividendo pelo inverso da fração divisora .

d) <u>Número misto ÷ Número misto</u>

Ex: $3\frac{5}{7} \div 2\frac{3}{8} = \frac{26}{7} \div \frac{19}{8} =$

$= \frac{26}{7} \times \frac{8}{19} = \frac{208}{133} = 1\frac{75}{133}$

<u>Regra</u> : Reduzem-se os números mistos à frações impróprias, para recair no caso precedente .

13 - EXPRESSÕES FRACIONÁRIAS

Antes de efetuar operações combinadas entre frações, devemos levar em consideração, as regras enunciadas a seguir, referentes ao cálculo de expressões fracionárias.

Regras

a) Quando são dadas multiplicações ou divisões ligadas à adições e subtrações em uma expressão aritmética, efetuam-se em primeiro lugar, as multiplicações ou divisões.

Ex 1) $\frac{2}{7} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{2} = \frac{6}{35} + \frac{1}{2} =$

$= \frac{12 + 35}{70} = \frac{47}{70}$

2) $\frac{4}{7} \times \frac{2}{5} + \frac{3}{11} \times \frac{2}{7} = \frac{8}{35} + \frac{6}{77} =$

$= \frac{88 + 30}{385} = \frac{118}{385}$

b) Quando figuram operações indicadas entre parêntesis nas expressões aritméticas, devemos efetuá-las separadamente das outras operações, que não estiverem subordinadas aos mesmos.

Ex: 1) $(\frac{2}{3} + \frac{3}{5}) \times \frac{4}{7} - \frac{1}{3} =$

$= \frac{10 + 9}{15} \times \frac{4}{7} - \frac{1}{3} = \frac{19}{15} \times \frac{4}{7} - \frac{1}{3} =$

$= \frac{76}{105} - \frac{1}{3} = \frac{76 - 35}{105} = \frac{41}{105}$

2) $(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{4}) : (\frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{1}{6}) =$

$= \frac{6 - 1}{12} : \frac{8 + 9 + 2}{12} =$

$= \frac{5}{\cancel{12}_{1}} \times \frac{\cancel{12}^{1}}{19} = \frac{5}{19}$

3) $\frac{3}{5} \times (\frac{7}{8} + \frac{5}{6}) + \frac{2}{3} \times (\frac{1}{2} + \frac{3}{4}) =$

$= \frac{3}{5} \times \frac{21 + 20}{24} + \frac{2}{3} \times \frac{2 + 3}{4} =$

$= \frac{\cancel{3}^{1}}{5} \times \frac{41}{\cancel{24}_{8}} + \frac{\cancel{2}^{1}}{3} \times \frac{5}{\cancel{4}_{2}} = \frac{41}{40} + \frac{5}{6} =$

$= \frac{123 + 100}{120} = \frac{223}{120} = 1\frac{103}{120}$

c) Quando tiver de multiplicar várias frações ordinárias, como nos exercícios seguintes, examine se não é possível simplificar, por meio de cancelamento.

Exs:

1) $\frac{\cancel{8}^{1}}{\cancel{8}_{\cancel{2}_{1}}} \times \frac{\cancel{4}^{1}}{7} \times \frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{8}_{1}} = \frac{1}{7}$

2) $\frac{\cancel{8}^{1}}{\cancel{8}_{\cancel{2}_{1}}} \times \frac{\cancel{4}^{1}}{\cancel{8}_{1}} \times \frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{8}_{1}} \times \frac{\cancel{8}^{1}}{11} = \frac{1}{11}$

3) $\frac{4}{7} \times \frac{2}{5} : \frac{2}{3} = \frac{4}{7} \times \frac{\cancel{2}^{1}}{5} \times \frac{3}{\cancel{2}_{1}} = \frac{12}{35}$

4) $(\frac{2}{3} + \frac{\overset{2}{\cancel{4}}}{5} \times \frac{3}{\underset{1}{\cancel{2}}}) \times \frac{3}{9} = (\frac{2}{3} + \frac{6}{5}) \times \frac{3}{5} =$

$= \frac{10 + 18}{15} \times \frac{3}{5} = \frac{28}{\underset{5}{\cancel{15}}} \times \frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{5} = \frac{28}{25} =$

$= 1\frac{3}{25}$

5) $(\frac{7}{9} - \frac{\overset{1}{\cancel{4}}}{\underset{1}{\cancel{8}}} \times \frac{\overset{1}{\cancel{8}}}{\underset{3}{\cancel{12}}}) : \frac{3}{7} = (\frac{7}{9} - \frac{1}{3}) : \frac{3}{7} =$

$= \frac{7 - 3}{9} \times \frac{7}{3} = \frac{4}{9} \times \frac{7}{3} = \frac{28}{27} = 1\frac{1}{27}$

6) $(7\frac{1}{6} - 5\frac{3}{8}) : \frac{7}{24} - (3\frac{5}{9} : 10\frac{2}{3}) =$

$= (\frac{43}{6} - \frac{43}{8}) : \frac{7}{24} - (\frac{32}{9} : \frac{32}{3}) =$

$= \frac{172 - 129}{\underset{1}{\cancel{24}}} \times \frac{\overset{1}{\cancel{24}}}{7} - \frac{\overset{1}{\cancel{32}}}{\underset{3}{\cancel{9}}} \times \frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{1}{\cancel{32}}} =$

$= \frac{43}{7} - \frac{1}{3} = \frac{129 - 7}{21} = \frac{122}{21} = 5\frac{17}{21}$

7) $\frac{2\frac{2}{3}}{5} \times \frac{3\frac{1}{2}}{4} = \frac{\frac{8}{3}}{5} \times \frac{\frac{7}{2}}{4} =$

$= \frac{\overset{3}{\cancel{8}}}{3} \times \frac{1}{5} \times \frac{7}{\underset{1}{\cancel{2}}} \times \frac{1}{\underset{1}{\cancel{4}}} = \frac{7}{15}$

8) $\frac{3 + \frac{1}{2}}{2 - \frac{1}{4}} - \frac{\frac{5}{6}}{\frac{7}{9}} = \frac{\frac{7}{2}}{\frac{7}{4}} - \frac{\frac{5}{6}}{\frac{7}{9}} =$

$= \frac{\overset{1}{\cancel{7}}}{\underset{1}{\cancel{2}}} \times \frac{\overset{2}{\cancel{4}}}{\underset{1}{\cancel{7}}} - \frac{5}{\underset{2}{\cancel{6}}} \times \frac{\overset{3}{\cancel{9}}}{7} = 2 - \frac{15}{14} =$

$= \frac{28 - 15}{14} = \frac{13}{14}$

9) $\frac{1\frac{5}{7} \times 2\frac{1}{3}}{2\frac{1}{2} + 4\frac{1}{6}} \times \frac{3\frac{3}{8} + 4\frac{1}{2}}{1\frac{3}{4} \times 3\frac{1}{3}} =$

$= \frac{\frac{\overset{4}{\cancel{12}}}{\underset{1}{\cancel{7}}} \times \frac{\overset{1}{\cancel{7}}}{\underset{1}{\cancel{3}}}}{\frac{5}{2} + \frac{25}{6}} \times \frac{\frac{27}{8} + \frac{9}{2}}{\frac{7}{\underset{2}{\cancel{4}}} \times \frac{\overset{5}{\cancel{10}}}{3}} =$

$= \frac{4}{\frac{15 + 25}{6}} \times \frac{\frac{27 + 36}{8}}{\frac{35}{6}} =$

$= \overset{1}{\cancel{4}} \times \frac{\overset{3}{\cancel{6}}}{\underset{5}{\cancel{40}}} \times \frac{\overset{9}{\cancel{63}}}{\underset{4}{\cancel{8}}} \times \frac{\overset{3}{\cancel{6}}}{\underset{5}{\cancel{35}}} = \frac{81}{100}$

10) $\frac{2}{5 + \frac{2}{4 + \frac{2}{3}}} = \frac{2}{5 + \frac{2}{\frac{14}{3}}} =$

$= \frac{2}{5 + \overset{1}{\cancel{2}} \times \frac{3}{\underset{7}{\cancel{14}}}} = \frac{2}{5 + \frac{3}{7}} = \frac{2}{\frac{38}{7}} =$

$$= \frac{2}{5 + \frac{3}{7}} = \frac{2}{\frac{38}{7}} = 2 \times \frac{7}{38} = \frac{7}{19}$$

14- POTÊNCIA DOS NÚMEROS FRACIONÁRIOS

a) FRAÇÃO ORDINÁRIA

Ex: $(\frac{2}{7})^3 = ? = \frac{2}{7} \times \frac{2}{7} \times \frac{2}{7} =$

$$= \frac{2 \times 2 \times 2}{7 \times 7 \times 7} = \frac{2^3}{7^3}$$

Regra - Para elevar uma fração a um número, elevam-se os dois têrmos a êsse número.

b) NÚMEROS MISTOS

Transformam-se prèviamente os números mistos em frações impróprias.

Ex: $(2 \frac{2}{3})^2 = (\frac{11}{4})^2 = \frac{11^2}{4^2}$

EXERCÍCIOS DE POTÊNCIAS

1) Escrever $\frac{1}{8}$ como potência de expoente negativo de 2.

Solução: $\frac{1}{8} = \frac{1}{2^3} = 2^{-3}$

2) Calcule: $1^{50} + \frac{1}{3^{-1} + 2^{-2}} + \frac{1}{2^{-3}} =$

Solução: $1^{50} + \frac{1}{3^{-1} + 2^{-2}} + \frac{1}{2^{-3}} =$

$$= 1 + \frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}} + \frac{1}{\frac{1}{8}} =$$

$$= 1 + \frac{1}{\frac{4 + 3}{12}} + 8 = 9 + \frac{12}{7} = 10\frac{5}{7}$$

3) Calcule: $\frac{2^{-1} + 3^{-1}}{5^{-1}} - 7^0 + 3 \times 2^{-1} =$

$$= \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{\frac{1}{5}} - 1 + 3 \times \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{\frac{3 + 2}{6}}{\frac{1}{5}} - 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{6} \times \frac{5}{1} - 1 + \frac{3}{2} =$$

$$= \frac{25}{6} - 1 + \frac{3}{2} = \frac{25 - 6 + 9}{6} = \frac{28}{6} = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}$$

4) $\frac{3^2 \times 5^3}{(3 \times 5)^2} + \frac{(2 \times 3)^3}{3^2} =$

$$= \frac{3^2 \times 5^3}{3^2 \times 5^2} + \frac{2^3 \times 3^3}{3^2} = 5 + 24 = 29$$

EXERCÍCIOS

1- Quantos terços há numa unidade, duas unidades, em três unidades ?

2- Quantos meios há na metade de uma unidade? Quantos terços há na terça parte de uma unidade? Quantos oitavos há na oitava parte de uma unidade?

3- Que alteração sofre a fração $\frac{8}{11}$, se multiplicarmos o numerador por 2 e se dividirmos por 4 ?

4- Que alteração sofre a fração $\frac{16}{19}$ se substituirmos o 16 por 32 ?

5- Qual a maior fração própria de denominador 14?

6- Classificar as seguintes frações :

$\frac{3}{8}$, $\frac{5}{10}$, $\frac{11}{33}$, $\frac{12}{4}$, $\frac{16}{16}$, $\frac{18}{45}$, $\frac{17}{100}$, $\frac{25}{17}$

7- Tranformar em frações impróprias, os números mistos seguintes :

$7\frac{2}{5}$, $8\frac{3}{10}$, $12\frac{4}{7}$, $51\frac{18}{47}$

8- Transformar em números mistos, as frações impróprias seguintes :

$\frac{71}{5}$, $\frac{78}{31}$, $\frac{239}{12}$, $\frac{59}{18}$

9- Reduzir :

$\frac{7}{14}$ a meios $\qquad$ $\frac{50}{55}$ a 11 avos

$\frac{20}{24}$ a sextos $\qquad$ $\frac{8}{20}$ a quintos

$\frac{25}{35}$ a sétimos $\qquad$ $\frac{54}{27}$ a nonos

10- Reduzir à expressão mais simples :

$\frac{28}{36}$, $\frac{72}{144}$, $\frac{99}{165}$, $\frac{121}{143}$, $\frac{73}{324}$, $\frac{539}{833}$, $\frac{286}{1859}$

$\frac{4459}{4802}$.

11- Reduzir ao mesmo denominador :

$\frac{3}{8}$, $\frac{7}{30}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{11}{15}$; $\frac{1}{10}$, $\frac{3}{15}$, $\frac{8}{25}$

$\frac{5}{6}$, $\frac{7}{20}$, $\frac{11}{25}$; $\frac{2}{24}$, $\frac{18}{48}$, $\frac{5}{22}$, $\frac{7}{44}$

12- Escreva em ordem decrescente :

$\frac{5}{3}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{5}{11}$ $\qquad$ $\frac{8}{17}$, $\frac{19}{17}$, $\frac{3}{17}$

$\frac{7}{15}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{11}{18}$

13- Efetue as operações indicadas :

$\frac{2}{5} + \frac{3}{5} + \frac{4}{5}$	Resp. $1\frac{4}{5}$
$\frac{5}{4} + \frac{7}{8} + \frac{1}{16}$	" $2\frac{3}{16}$
$\frac{7}{20} + \frac{3}{40} + \frac{1}{80} + \frac{3}{15}$	" $\frac{51}{80}$
$\frac{6}{17} + \frac{1}{34} + \frac{1}{51} + \frac{4}{3}$	" $1\frac{25}{34}$
$1\frac{1}{2} + 2\frac{1}{3} + 1\frac{1}{6}$	" 5
$3\frac{1}{4} + 5\frac{3}{4}$	" 9
$4\frac{1}{6} + 3\frac{1}{10} + 2\frac{1}{15}$	" $9\frac{1}{3}$
$7 + \frac{8}{7}$	" $8\frac{1}{7}$
$(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}) + \frac{1}{6}$	" $1\frac{1}{4}$
$\frac{4}{5} - \frac{1}{5}$	" $\frac{3}{5}$
$\frac{23}{25} - \frac{11}{25} - \frac{7}{25}$	" $\frac{1}{5}$
$\frac{7}{12} - \frac{1}{4}$	" $\frac{1}{3}$
$\frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{40}$	" $\frac{7}{20}$

$13 - \frac{7}{8}$ Resp. $12\frac{1}{8}$

$6\frac{5}{6} - 3\frac{1}{6}$ " $3\frac{2}{3}$

$12\frac{2}{3} - 7\frac{1}{11}$ " $5\frac{19}{33}$

$16 - 2\frac{7}{10}$ " $13\frac{3}{10}$

$\frac{6}{9} + \frac{15}{25} - \frac{8}{15}$ " $\frac{11}{15}$

$3 + \frac{3}{5} - \frac{1}{8}$ " $3\frac{19}{40}$

$9 + \frac{5}{8} - 3 + 2\frac{1}{9}$ " $8\frac{53}{72}$

$\frac{3}{8} - (\frac{1}{6} + \frac{1}{12})$ " $\frac{1}{8}$

$(\frac{6}{14} + \frac{3}{7}) - (\frac{1}{3} + \frac{1}{6})$ " $\frac{5}{14}$

$(4\frac{1}{2} - 3\frac{1}{4}) + (6\frac{1}{5} - 5\frac{1}{6})$ R: $2\frac{17}{60}$

$\frac{2}{3} \times \frac{3}{2}$ " 1

$\frac{7}{8} \times \frac{16}{21}$ " $\frac{2}{3}$

$\frac{3}{5} \times \frac{17}{19} \times \frac{5}{34} \times \frac{38}{75}$ " $\frac{1}{25}$

$6\frac{2}{7} \times 1\frac{3}{11}$ " 8

$3\frac{1}{6} \times 2\frac{4}{19}$ " 7

$1\frac{1}{2} \times 1\frac{1}{3} \times 1\frac{1}{5}$ " $2\frac{2}{5}$

$2\frac{1}{2} \times \frac{1}{5} \times 2$ Resp. 1

$7\frac{2}{3} \times \frac{11}{46} \times \frac{1}{121} \times 66$ " 1

$(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) \times 6$ " 1

$(4 + 2\frac{3}{5}) \times \frac{1}{66}$ " $\frac{1}{10}$

$(8 - \frac{2}{9}) \times \frac{1}{35}$ " $\frac{2}{9}$

$(7\frac{2}{9} + 5\frac{1}{6} - 12\frac{5}{18}) \times 27$ " 3

$\frac{3}{5} : \frac{7}{10}$ " $\frac{6}{7}$

$\frac{7}{8} : \frac{14}{9}$ " $\frac{9}{16}$

$8 : \frac{1}{2}$ " 16

$15 : \frac{3}{4}$ " 20

$\frac{6}{7} : 9$ " $\frac{2}{21}$

$3\frac{1}{4} : 4\frac{1}{3}$ " $\frac{3}{4}$

$(\frac{1}{2} : \frac{3}{4}) : \frac{3}{2}$ " $\frac{4}{9}$

$(8 + \frac{3}{4}) : 4\frac{1}{5}$ " $2\frac{1}{12}$

$(\frac{3}{5} \times \frac{10}{9} \times \frac{3}{4}) : 3\frac{1}{2}$ " $\frac{1}{7}$

$\frac{5}{3/8}$ " $13\frac{1}{3}$

$\frac{2}{3} / \frac{3}{7}$ Resp. $1\frac{5}{9}$

$\dfrac{\frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{1}{30}}{\frac{23}{30}}$ " 1

$\dfrac{4\frac{1}{2} - 3\frac{2}{3} + \frac{1}{4}}{2 - \frac{1}{5}}$ " $\frac{65}{108}$

$\dfrac{\frac{1}{10} + \frac{1}{100} - \frac{1}{1000}}{10}$ " $\frac{109}{10000}$

$\dfrac{\left(9 : \frac{1}{\frac{1}{3}} \times \frac{4}{5}\right) \times \frac{5}{12}}{6 : \frac{1}{\frac{1}{2}}}$ " $\frac{1}{3}$

$\dfrac{\frac{1/2}{1/3} + \frac{1/4}{1/5} - \frac{1/5}{1/6}}{\frac{1/6}{1/7} + \frac{1/4}{1/8} - \frac{1/8}{1/9}}$ " $\frac{186}{245}$

$\left(7 + 3\frac{1}{8}\right) : \left(14 + 6\frac{1}{4}\right)$ " $\frac{1}{2}$

§§§§§§§§§§§§§§§§§§

XII- NÚMEROS DECIMAIS

1 - INTRODUÇÃO

A primeira discussão sistemática sôbre as frações decimais, deve-se a Simon Stevin (1548-1620) de Bruges.

Em 1585 apareceu publicada em Leyden, sua famosa obra " La Thiende ".

Esta obra foi dada a conhecer por Robert Norton, em uma tradução inglesa editada em Londres em 1608, mediante o título de " La Disne " ou "The Art of Tenths or Decimal Arithmetike ".

Logo em seguida, foram adotados os números decimais.

2- CONCEITO

Consideremos a seguinte fração decimal:

$\frac{793}{100}$.

Podemos escrever a mesma, sob a seguinte forma: $\frac{700 + 90 + 3}{100}$ ou $\frac{700}{100} + \frac{90}{100} + \frac{3}{100}$

Logo: $\frac{793}{100} = \frac{700 + 90 + 3}{100} =$

$= \frac{700}{100} + \frac{90}{100} + \frac{3}{100}$ ou simplificando:

$7 + \frac{9}{10} + \frac{3}{100} = 7,93$

Êste símbolo novo, recebeu o nome de: NÚMERO DECIMAL e corresponde à fração decimal, escrita sob outra forma: 7, 93

parte inteira: 7 — parte decimal: 93

Consideremos o seguinte número decimal : 542,5762

ORDENS DECIMAIS

Parte inteira — Parte decimal

5 4 2 , 5 7 6 2

- 5: Centenas simples
- 4: Dezenas simples
- 2: Unidades simples
- 5: Décimos
- 7: Centésimos
- 6: Milésimos
- 2: Décimos milésimos

1 inteiro

1 décimo

1 centésimo

Consideremos outro exemplo de fração decimal : $\frac{937}{100}$.

Transformando-a em número misto, temos:

$$\frac{937}{100} = 9 + \frac{37}{100}$$

Decompondo a fração que acompanha o inteiro, vem :

$$\frac{937}{100} = 9 + \frac{30}{100} + \frac{7}{100}$$

ou simplificando:

$$\frac{937}{100} = 9 + \frac{3}{10} + \frac{7}{100}$$

A fração ficou dêsse modo, decomposta em uma parte inteira e várias partes decimais da unidade, a saber :

9 inteiros, 3 décimos e 7 centésimos

Essas partes são designadas por unidades decimais de : primeira ordem, de segunda ordem, de terceira ordem , etc .

Por outro lado, tendo em vista que :

$$1 = \frac{10}{10} , \frac{1}{10} = \frac{10}{100} , \frac{1}{100} = \frac{10}{1000}$$

Segue-se que , como os números inteiros, as frações decimais podem ser decompostas em unidades de diferentes ordens, as quais, se sucedem segundo a mesma lei :

" Cada unidade de uma ordem, vale dez unidades da ordem imediatamente superior " .

Essa lei permite a representação das frações decimais de modo análogo a dos números inteiros, para o que basta se fixar o lugar que deve ser ocupado pelos algarismos das unidades simples na parte inteira e aplicar a convenção fundamental da numeração escrita .

Ex : $\frac{4537}{1000} = 4 + \frac{5}{10} + \frac{3}{100} + \frac{7}{1000}$

Se convencionarmos separar por uma vírgula, dentre os algarismos que representam as unidades decimais das diferentes ordens, o algarismo que representa as unidades simples da parte inteira e se escrevermos depois da vírgula, sucessivamente : os décimos, centésimos, milésimos , etc .

Logo : $\frac{4537}{1000} = 4 + \frac{5}{10} + \frac{3}{100} + \frac{7}{1000} = 4,537$

Portanto, a fração decimal $\frac{4537}{1000}$ fica escrita sob a forma de número decimal : 4,537

3- MODO DE LER UM NÚMERO DECIMAL

a) Lê-se o número, como se fôsse inteiro e dá-se a denominação da ordem que corresponde ao úl-

timo algarismo. Exemplo :

7,43 - setecentos e quarenta e três centésimos .

85,125 - oitenta e cinco mil, cento e vinte e cinco milésimos .

b) O número decimal pode também ser lido , enunciando-se primeiro a parte inteira e depois, a decimal .

Ex : 34,125 - trinta e quatro inteiros e cento e vinte e cinco milésimos .

4- MODO DE ESCREVER UM NÚMERO DECIMAL

REGRA - Escreve-se a parte inteira seguida de uma vírgula e depois a decimal, com o cuidado de colocar cada algarismo, no lugar das unidades que representa .

Ex : Setenta e quatro mil, trezentos e vinte e seis centésimos .

74, 326

5- CONVERSÃO DE FRAÇÃO DECIMAL, EM NÚMERO DECIMAL e VICE- VERSA.

a) Para converter uma fração decimal em número decimal, escreve-se apenas o numerador, separando-se tantas casas decimais, quantos forem os zeros do denominador .

Ex : $\frac{542}{100} = 5,42$ $\frac{74}{1000} = 0,074$

b) Para converter um número decimal em fração decimal, escreve-se no numerador o número, suprimindo a vírgula e no denominador, a unidade seguida de tantos zeros, quantos forem as casas decimais .

Ex : $7,43 = \frac{743}{100}$ $0,8548 = \frac{8548}{10000}$

6- PROPRIEDADES DOS NÚMEROS DECIMAIS

a) O número decimal não muda de valor, se acrescentarmos ou suprimirmos zeros à direita do último algarismo .

Ex : 0,7 = 0,70 = 0,700

Observe a razão : $\frac{7}{10} = \frac{70}{100} = \frac{700}{1000}$ (simplificados: $\frac{7}{10}$)

Em face da propriedade que diz :

" multiplicando-se ambos os têrmos de uma fração por um mesmo número, ela não se altera " .

b) Para multiplicar um número por 10, 100, 1000 , etc, desloca-se a vírgula uma, duas, três ,etc ordens para a direita .

Ex : 2,345 x 10 = 23,45
1,648 x 100 = 164,8

c) Para dividir um número por 10, 100, 1000, etc, desloca-se a vírgula uma, duas, três, etc, ordens para a esquerda .

Ex : 16,27 : 10 = 1,627
254,8 : 100 = 2,548

Para DIVIDIR ←.....,.....→ Para MULTIPLICAR

-Desloca-se a vírgula para a esquerda.

-Desloca-se a vírgula para a direita.

7- O P E R A Ç Õ E S

a) A D I Ç Ã O

Seja adicionar : $3,42 + 1,145 + 0,8$

Vamos deduzir a regra, operando com frações decimais :

$$3,42 + 1,145 + 0,8 = \frac{342}{100} + \frac{1145}{1000} + \frac{8}{10} =$$

$$= \frac{3420 + 1145 + 800}{1000} = \frac{5365}{1000} = 5,365$$

Logo :

3,420
1,145
0,800
5,365

Quando reduzimos os números decimais à mesma denominação, é como se reduzíssemos as frações decimais, ao mesmo denominador .

REGRA : PARA SOMAR NÚMEROS DECIMAIS

Escrevem-los uns sob os outros, de modo que, as vírgulas se correspondam verticalmente . efetua-se a soma, como se fôssem números inteiros e coloca-se no resultado, uma vírgula em coluna com as das parcelas .

b) S U B T R A Ç Ã O

Consideremos a diferença : $7,3 - 2,458$

Convertendo êsses números em frações, temos :

$$7,3 = \frac{73}{10} \qquad 2,458 = \frac{2458}{1000}$$

Subtraindo essas frações, encontramos :

$$\frac{73}{10} - \frac{2458}{1000} = \frac{7300 - 2458}{1000} = \frac{4842}{1000}$$

Convertendo o resultado obtido em número decimal, temos :

$$\frac{4842}{1000} = 4,842$$

Chega-se dêsse modo a que :

$7,3 - 2,458 = 4,842$

Na prática, pode-se adotar um dos dispositivos indicados a seguir, escrevendo-se os números dados, de modo que, as unidades da mesma ordem fiquem colocadas em colunas e operando do modo seguinte :

7,300
-2,458
4,842

Subtraem-se os números decimais dados, como se fôssem inteiros e coloca-se no resultado, uma vírgula

7,3
-2,458
4,842

em coluna com as demais. Pode-se ainda deixar de escrever os zeros necessários, para igualar o número de algarismos decimais dos têrmos da subtração, desde que se tenha o cuidado de dispô-las como se nêles figurassem zeros .

REGRA : PARA SUBTRAIR NÚMEROS DECIMAIS

Escreve-se o subtraendo sôb o minuendo, de modo que, as vírgulas se correspondam verticalmente. Efetua-se a subtração como se fôssem números inteiros e coloca-se no resultado uma vírgula, em coluna com as dos números dados .

c) M U L T I P L I C A Ç Ã O

Consideremos o seguinte produto :

$5,48 \times 7,2$

Convertendo os fatôres em frações decimais, e efetuando depois a multiplicação, encontramos :

$$5,48 \times 7,2 = \frac{548}{100} \times \frac{72}{10} = \frac{39456}{1000} = 39,456$$

5,48
x 7,2
1096
3836
39456

Verificamos dêsse modo, que o resultado obtido, é um número decimal, formado pelo produto dos números dados, como também que o número de algarismos decimais do produto, é igual à soma

aos número de algarismos decimais dos fatôres .

REGRA : PARA MULTIPLICAR NÚMEROS DECIMAIS

Procede-se como se fôssem inteiros e depois, separa-se à direita do produto, tantos algarismos decimais, quantos contém ao todo, os dois fatôres

Exs:

```
1)   234,5        2)   5,246        3)      0,034
   x   0,42          x 1,31             x 0,5200
     4690              5246                6800
    9380             15738                 170
    98,490           5246              0,0176800
                     6,87226
```

d) D I V I S Ã O

Na divisão há dois casos a considerar :

1º Caso : O divisor é inteiro

Ex : $7,345 \div 81 = \frac{7345}{1000} \times \frac{1}{81} =$

$= \frac{7345}{81} \times \frac{1}{1000} = \frac{7345}{81} \times 0,001 =$

$= 90 \times 0,001 = 0,090$

REGRA : PARA DIVIDIR UM NÚMERO DECIMAL POR UM NÚMERO INTEIRO .

Efetua-se a operação como se o dividendo fôsse inteiro, tendo-se o cuidado de colocar a vírgula no quociente, ao considerar o algarismo dos décimos do dividendo .

Exs.

```
85,342 | 5              38,915 | 38
35       17,068         091      1,024
 034                     155
  42                       3
   2
```


2º Caso : O divisor é decimal

Ex: $58,345 \div 3,42 = \frac{58345}{1000} \div \frac{342}{100} =$

$= \frac{58345}{1000} \times \frac{100}{342} = \frac{58345}{342} \times \frac{1}{10} =$

$= 170 \times 0,1 = 17,0$

```
58,345 | 3,42
2414     17,0
 205
```

REGRA : PARA DIVIDIR UM NÚMERO DECIMAL POR OUTRO DECIMAL

Multiplicam-se ambos pela potência de dez, necessária (pela unidade seguida de tantos zeros, quantos forem os algarismos da parte decimal do divisor) , para tornar o divisor inteiro.

Efetua-se a operação segundo a regra do caso precedente .

Exs :

```
a)  3.8569 | 125          b)  254800 | 48
      1069   3,08              148     5308
        69                      400
                                 16
```

8- NOÇÃO DE QUOCIENTE APROXIMADO

Seja dividir 7 por 3

```
Temos :  7 | 3      Logo :   2 < 7 : 3 < 3
         1   2
```

É evidente que o quociente do número 7 pelo número 3, está compreendido entre 2 e 3 .

Poderíamos escrever : $7 \div 3 = 2 +$ Fração

ou $7 \div 3 = 3 -$ Fração

Tomando por quociente o número 2, temos que êsse <u>quociente é por falta</u> (2 x 3 = 6)

Tomando por quociente o número 3, temos que êsse <u>quociente é por excesso</u> (3 x 3 = 9)

Quer se tome o quociente por falta 2, ou por excesso 3, comete-se um êrro menor que uma unidade, pois, o quociente verdadeiro está entre o 2 e o 3

$\frac{7}{3}$

0 1 2 3 4 5

Se o quociente fôr 2, comete-se êsse êrro.

1

Se o quociente fôr 3, comete-se êsse êrro.

O intervalo todo (3 - 2) vale <u>um</u> .

Na vida prática, é de vital importância, efetuar os cálculos com maior precisão.

Para um pedreiro que fôsse construir uma calçada, êsse êrro menor que uma unidade, não prejudicaria a perfeição aparente de seu trabalho.

Todavia, se um relojoeiro cometer êsse êrro na construção de uma das peças de um relógio, o que acontecerá, é que o mesmo jamais entrará em funcionamento.

As construções dos aparelhos de ótica (lentes, microscópios, lunetas , etc) exigem uma grande precisão .

Mesmo o rapaz que trabalha numa oficina mecânica, necessita utilizar aparelhos de medida , como : paquímetro, micrômetro, etc , para fazer as medidas das peças.

Podemos obter um quociente com aproximação desejada .

Temos : $7 \div 3 = \frac{70}{10} \div 3 = 7{,}0 \div 3$

Aplicamos a propriedade :" Multiplicando-se e dividindo-se um número, por uma mesma quantidade, o número não se altera.

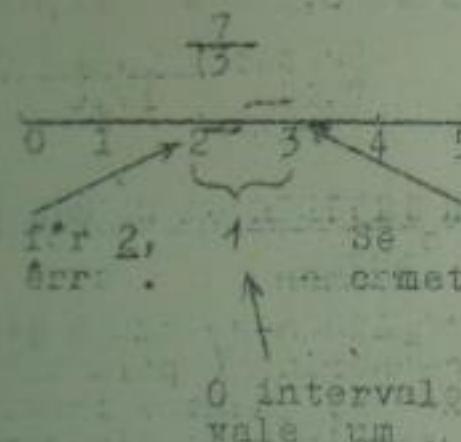
No caso, multiplicamos e dividimos 7 por 10. Obteremos agora, um quociente com aproximação de décimos .

```
7,0 |3
10   2,3
 1
```

Desejando-se uma aproximação de centésimos : $7 \div 3 = \frac{700}{100} \div 3 \cong 7{,}00 \div 3 \cong 2{,}33$

```
7,00 |3
10    2,33
 10
  1
```

Se desejarmos uma aproximação de milésimos :

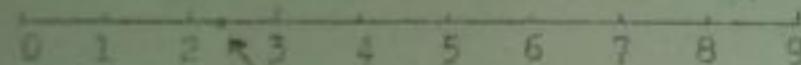
$$7 \div 3 = \frac{7000}{1000} \div 3 \cong 7{,}000 \div 3 \cong 2{,}333$$

```
7,000 |3
10     2,333
 10
  10
   1
```

Para que você possa compreender bem que, os êrros cometidos, são cada vez menores, façamos uma interpretação geométrica :

$2 < \frac{7}{3} < 3$	Êrro menor que a unidade
$2{,}3 < \frac{7}{3} < 2{,}4$	Êrro menor que um décimo
$2{,}33 < \frac{7}{3} < 2{,}34$	Êrro menor que 1 centésimo
$2{,}333 < \frac{7}{3} < 2{,}334$	Êrro cometido será menor do que um milésimo .

a) $2 < \frac{7}{3} < 3$

Interpretação geométrica

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

O quociente está dentro do intervalo (2 - 3)

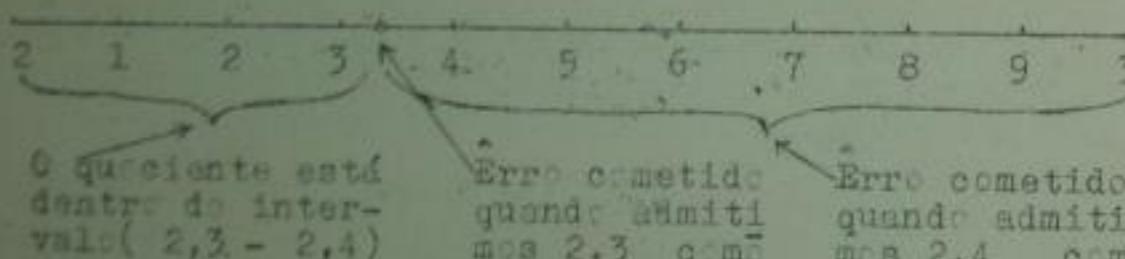
b) $2,3 < \frac{7}{3} < 2,4$

Interpretação geométrica

Vamos dividir o intervalo (2 - 3) do desenho anterior em 10 partes, é evidente que cada parte representará um décimo do intervalo.

Feito isso, olhemos um intervalo com uma lente, para ampliá-lo.

Êrro cometido quando admitimos 2 como quociente

Êrro cometido quando admitimos 3 como quociente.

Observando o gráfico, fácil é concluir que, quanto maior a aproximação, menor o êrro cometido.

Exs: 1) Calcular a menos de 0,1 por falta, o quociente de 37 por 5.

Temos:

```
37,0 |5
 20   7,4
  0
```


2- Calcular a menos de 0,1 por falta, o quociente de 43,82 por 15.

No caso considerado, o dividendo já possue a ordem dos centésimos, portanto, não é necessário acrescentar zeros.

Então:

```
43,82 |15
138    2,92
  32
   2
```

3- Calcular a menos de 0,01 por falta, o quociente de 57,514 por 18. Nêste caso, devemos desprezar os 4 milésimos.

```
57,51 |18
 35    3,19
 171
   9
```

NOTA: Se o algarismo à desprezar fôsse 5, 6,7, 8 ou 9, deveríamos ao desprezá-lo, adicionar uma unidade ao valor do algarismo precedente.

4- Calcular a menos de 0,01 por falta, o quociente de 85,126 por 15.

```
85,13 |15
101    5,67
 113
   8
```

9- POTENCIAÇÃO DOS NÚMEROS DECIMAIS

Ex: $(2,5)^3 = 2,5 \times 2,5 \times 2,5 = 15,625$

REGRA:

Para elevar um número decimal a qualquer potência, procede-se como se êle fôsse nu

mero inteiro e separa-se à direita do resultado, tantos algarismos decimais, quantos contém o número dado, multiplicados pelo valor do expoente.

10 - RAIZ QUADRADA DOS NÚMEROS DECIMAIS

Devemos adotar o seguinte :

a) Verificar se o número de algarismos da parte decimal é par. Se não fôr, acrescentar um zero.

b) Desprezar a vírgula e extrair a raiz quadrada, como se o número fôsse inteiro.

c) Considerar tantos algarismos na parte decimal da raiz, quantas são as classes decimais do número.

Ex : Extrair a raiz quadrada de : 57,8360

1) 57,8360 duas classes decimais

2)
```
 __________
√ 57.83.60 | 760
  -49       |______________
   88.3     | 146 x 6 = 876
  -87.6     | 152
  ------    |
    76.0    |
```

3) 7,60

11- APROXIMAÇÃO DECIMAL NO CÁLCULO DA RAIZ QUADRADA

Seja extrair a raiz quadrada de 3. Como $1^2 < 3 < 2^2$, diremos que a $\sqrt{3}$ é 1 por falta e 2 por excesso, com êrro menor do

que uma unidade.

Com isso, queremos dizer que 1 é o maior número de unidades cujo quadrado não excede três, e, que 2 é o menor número de unidades cujo quadrado excede três.

Dizendo que a $\sqrt{3}$ é 1 ou 2 cometeremos pois, um êrro menor que uma unidade.

Esta raiz, sem êrro de 1 unidade é obtida pelo processo geral de extração da raiz quadrada de um número inteiro.

A raiz que obtemos é a raiz por falta e somando-lhe uma unidade, temos a raiz por excesso.

Observaremos que, quando nos referimos a uma raiz aproximada, sem especificar se é por falta ou por excesso, admitimos que é por falta.

Se observarmos agora, que :

$1,7^2 < 3$

$1,8^2 < 3$

1,7 e 1,8 são raizes quadradas de 3, por falta e por excesso, respectivamente, com êrro menor de 1 décimo.

1,7 décimos (1,7) é o maior número de décimos, cujo quadrado não excede 3.

1,8 décimos (1,8) é o menor número de décimos, cujo quadrado excede 3.

Prosseguindo anàlogamente, diremos de modo geral :

" A raiz quadrada de um número sem êrro de uma certa ordem decimal, por falta, é o maior número de unidades dessa ordem, cujo quadrado não excede o número dado."

Por excesso, é o menor número de unidades dessa ordem, cujo quadrado excede o número dado.

Para obter a raiz quadrada de um número inteiro, sem êrro de uma determinada ordem decimal, raciocinamos da seguinte forma :

Lembraremos inicialmente que, elevamos um número decimal ao quadrado, fazendo abstração da vírgula, isto é, considerando-o inteiro e depois,

duplo de ordens decimais .
tomamos um número quisermos extrair a raiz
Logo, quando quisermos extrair a raiz quadrada de um número inteiro, 3 por exemplo, sem êrro de 0,001 , bastará considerarmos o número 3, decimalizado, tendo um número duplo de ordens decimais dos pedidos na raiz . O 6 por consequência , isto é, consideraremos o número : 3,000000 .

Extrairemos a raiz quadrada dêste número sem a vírgula, isto é, a $\sqrt{3,000000}$ e no resultado, tomamos um número de ordens decimais igual à metade do número de zeros colocados .

Como a raiz de $\sqrt{3,000000}$ sem êrro de uma unidade é 1732, a $\sqrt{3}$ sem êrro de 0,001 é: 1,732 .

Exemplo :

$\sqrt{}$ 300 00 00	1732
-1	27 x 7 = 189
200	343 x 3 = 1029
-189	3462 x 2 = 6924
110.0	
-102.9	
7100	
-6924	
176	

Temos :

$1 < \sqrt{3} < 2$ A menos de uma unidade

$1,7 < \sqrt{3} < 1,8$ a menos de 0,1

$1,73 < \sqrt{3} < 1,74$ a menos de 0,01

$1,732 < \sqrt{3} < 1,733$ a menos de 0,001

- Para obter a raiz com aproximação de 1 décimo (0,1), o número deve possuir dois algarismos na parte decimal .

- Para obter a raiz com a aproximação de um centésimo (0,01), o número deve possuir quatro algarismos na parte decimal .

- Para obter a raiz com aproximação de um milésimo (0,001), o número deve possuir seis algarismos na parte decimal , etc .

12- RAIZ QUADRADA DAS FRAÇÕES ORDINÁRIAS

Consideremos os seguintes casos :

1º - Os dois têrmos da fração são quadrados .
2º - Sòmente o denominador é quadrado.
3º - O denominador não é quadrado

1º) OS DOIS TÊRMOS DA FRAÇÃO SÃO QUADRADOS

Vimos que, para elevar uma fração ao quadrado, é bastante elevarmos ao quadrado, cada um dos seus têrmos .

Por conseguinte, para extrair a raiz quadrada de uma fração, cujos têrmos são quadrados, devemos extrair a raiz quadrada de cada um de seus têrmos .

Exs: $\sqrt{\frac{36}{64}} = \frac{6}{8}$ $\sqrt{\frac{121}{144}} = \frac{11}{12}$

2º) SÒMENTE O DENOMINADOR É QUADRADO

Nêste caso, a fração dada não tem raiz quadrada exata, Extraimos a raiz quadrada do numerador sem êrro de uma unidade, e, a raiz quadrada exata do denominador .

Obtemos o resultado com uma aproximação igual à unidade,dividida pela raiz quadrada do denominador da fração dada .

Ex : $\sqrt{\frac{17}{81}} \cong \frac{4}{9}$ por falta e $\frac{5}{9}$ por excesso

a menos de $\frac{1}{9}$

$\sqrt{\frac{58}{121}} = \frac{7}{11}$ por falta e $\frac{8}{11}$ por excesso, a menos de $\frac{1}{11}$

3º) O DENOMINADOR NÃO É QUADRADO

Nêste caso, tornamos o denominador quadrado, multiplicando os dois têrmos da fração dada, pelo produto dos fatôres primos do denominador, que possuem expoentes ímpares.

Ex: $\sqrt{\frac{258}{54}} = \frac{\sqrt{258 \times 2 \times 3}}{2 \times 3^3 \times 2 \times 3} = \frac{\sqrt{1548}}{\sqrt{2^2 \times 3^4}}$

```
54 | 2
27 | 3
 9 | 3
 3 | 3
 1 |
```

$54 = 2 \times 3^3$

$\frac{39}{18}$ por falta e $\frac{40}{18}$ por excesso.

```
  15.48 | 39
  -9    |-----------
   64.8 | 69 x 9 = 621
  -62.1 |
    2 7 |
```

NOTA: 1) Em geral na prática, a raiz quadrada de uma fração ordinária é calculada com uma aproximação de uma dada ordem decimal.
Para isso, reduzimos a fração ordinária à decimal, até obtermos o dôbro do número de algarismos decimais que quisermos obter na raiz e procedemos a extração da raiz quadrada do número assim formado.

Ex: $\sqrt{\frac{5}{7}}$ com êrro de 0,01


```
5.00 00 | 7
10      |--------
 30     | 0,7142
  20
   6
```

$\sqrt{0,7142} = ?$ 0,84

```
  71.42 | 84
 -64    |-----------
   74.2 | 164 x 4 =
  -65 6 |     = 656
    8 6 |
```

NOTA: 2) Para extrair a raiz quadrada de uma fração imprópria, com êrro a menos de uma unidade, reduzimos a fração dada, à número misto e extraímos a raiz quadrada apenas da parte inteira.

Ex: $\sqrt{\frac{17}{5}} = \sqrt{3\frac{2}{5}} \cong \sqrt{3} = 1,7$ com êrro menor do que 0,1.

13 - CONVERSÃO DE FRAÇÃO ORDINÁRIA EM DECIMAL E VICE-VERSA.

a) Conversão de frações ordinárias em decimais

Consideremos as seguintes frações:

$\frac{17}{4} = ?$ $\frac{2}{3} = ?$ $\frac{32}{15} = ?$ $\frac{31}{25} = ?$

$\frac{329}{99} = ?$ $\frac{73}{100} = ?$ $\frac{711}{500} = ?$ $\frac{113}{80} = ?$

$\frac{4}{27} = ?$ $\frac{23}{66} = ?$ $\frac{5}{21} = ?$

Vamos converter essas frações à decimais.

Para isso, é suficiente dividir o numerador pelo denominador . Temos :

```
17 |4          2 |3          32 |5
10  4,25      20  0,666...   20  2,133
 20           20             50
  0            2             50
                              5

31 |25        329 |99        73,0 |150
60  1,24      320  3,3232    1300  0,4866..
100           230            1000
  0           320            1000
              230             100
               32

113 |80       40 |27         230 |66
330  1,4125   130  0,148148..  320  0,34848..
100           220             560
200           040             320
400           130             560
  0           220              32
              040

711 |500      50 |21
2110 1,422    80  0,238095
1100          170
1000          200
   0          110
                5
```

Logo : $\frac{17}{4} = 4,25$ $\frac{32}{15} = 2,1(3)$

$\frac{2}{3} = 0,(6)$ $\frac{31}{25} = 1,24$ $\frac{73}{150} = 0,48(6)$

$\frac{329}{99} = 3,(32)$ $\frac{113}{80} = 1,4125$ $\frac{4}{27} = 0,(148)$

$\frac{23}{66} = 0,3(48)$ $\frac{711}{500} = 1,422$ $\frac{5}{21} = 0,(238095)$

Observando-se os resultados obtidos, podemos concluir :

1- A divisão pode ser exata ou aproximada .

2- Quando a divisão fôr exata (resto = 0 -zero-), o quociente será uma decimal exata e possuirá um número bem determinado de algarismos na parte decimal (decimal finita).

3- Quando a divisão fôr inexata, o quociente será uma decimal infinita, isto é, constituida por um número infinito de algarismos na parte decimal .

Nêste caso, diremos que o quociente é uma dízima periódica, em face de possuir um algarismo, ou um grupo de algarismos que se repetem indefinidamente .

O grupo que se repete (de algarismos), chamaremos de : período .

Ainda no caso da decimal infinita, podemos constatar que o grupo de algarismos que se repete, pode vir imediatamente após a vírgula (dízima periódica simples) .

Entre a parte inteira e o período, há um grupo de algarismos que não se repetem, (dízima periódica composta), chamado : " ante-período .

DECIMAIS EXATAS

$\frac{17}{4} = 4,25$ $\frac{31}{25} = 1,24$

$\frac{113}{80} = 1,4125$ $\frac{711}{500} = 1,422$

1) DÍZIMAS PERIÓDICAS SIMPLES

$\frac{2}{3} = 0,(6)$ $\frac{5}{21} = 0,(238095)$

$\frac{329}{99} = 3,(32)$ $\qquad \frac{4}{27} = 0,(148)$

parte inteira — período

NOTA :

1) Devemos colocar dentro de parêntesis o período
Outras anotações : 3,(32) = 3, 32 =
= 3,323232.....

2) As dízimas periódicas simples podem ser :
Período simples (1 só algarismo) Ex : 0,(6)
Período composto (2 ou mais algarismos)
Ex : 3,(32) .

2- DÍZIMAS PERIÓDICAS COMPOSTAS

$\frac{32}{15} = 2,1(3)$ ← período

parte inteira . — ante-período

$\frac{73}{150} = 0,48(6)$ $\qquad \frac{23}{66} = 0,3(48)$

As dízimas periódicas compostas podem ser :

Período simples (1 só algarismo)
" composto (2 ou mais algarismos)
Ante-período simples (1 só algarismo)
" " composto (2 ou mais algarismos)

Poderemos saber se uma fração ordinária, dá origem a uma decimal exata, ou a uma dízima periódica simples ou composta.

E' suficiente decompôr o denominador da

fração irredutível .

a) Se o denominador só contiver uma potência de 2 ou uma potência de 5, ou um produto de potências de 2 e 5, dá origem a uma decimal exata.

Ex : $\frac{17}{2^2} = 4,25$ $\qquad \frac{31}{5^2} = 1,24$

$\frac{113}{2^4 \times 5} = 1,4125$ $\qquad \frac{711}{2^2 \times 5^3} = 1,422$

NOTA : O número de algarismos da parte decimal, é dado pelo maior expoente .

b) Se o denominador só contiver fatôres diferentes de 2 e 5 , dá origem a uma dízima periódica simples .

Ex: $\frac{2}{3} = 0,(6)$ $\qquad \frac{329}{3^2 \times 11} = 3,(32)$

$\frac{4}{3^3} = 0,(148)$ $\qquad \frac{5}{3 \times 7} = 0,(238095)$

c) Se o denominador contiver além dos fatôres 2 e 5, outros fatôres, dá origem a uma dízima periódica composta .

Ex : $\frac{32}{3 \times 5} = 2,1(3)$ $\qquad \frac{73}{2 \times 3 \times 5^2} = 0,48(6)$

$\frac{23}{2 \times 3 \times 11} = 0,3(48)$

b) DETERMINAÇÃO DAS GERATRIZES DAS DÍZIMAS PERIÓDICAS

1- A fração geratriz de uma dízima periódica simples, determina-se da seguinte maneira :
- Forma-se uma fração ordinária, que tenha pa

ra numerador, o número formado da parte inteira, seguida do período, menos a parte inteira, e, para denominador um número formado de tantos noves quantos fôrem os algarismos do período.

Ex : $3,(32) = \frac{332 - 3}{99} = \frac{329}{99}$

$0,(6) = \frac{06 - 0}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

2- A fração geratriz de uma dízima periódica composta, determina-se da seguinte forma :

- Forma-se uma fração que tenha para numerador, o número formado da parte inteira, seguida do ante-período e de um período, menos o número formado da parte inteira, seguida do ante-período, e, para denominador, um número formado de tantos noves, quantos fôrem os algarismos do período, seguido de tantos zeros, quantos fôrem os algarismos do ante-período.

Exs: $2,1(3) = \frac{213 - 21}{90} = \frac{192}{90} = \frac{32}{15}$

$0,48(6) = \frac{0486 - 048}{900} = \frac{438}{900} = \frac{73}{150}$

$0,3(48) = \frac{0348 - 03}{990} = \frac{345}{990} = \frac{23}{66}$

	2	1	6	1	2
990	345	300	45	30	15
300	45	30	15	0	
66	23	20	3	2	1

EXERCÍCIOS

1- Decompondo o número decimal 0,853 em três frações decimais, teremos :

0,853 = ...

2- Efetue as somas :

0,45 + 2,297

2,49 + 0,001 + 0,0085 + 5

3- De 5,725 subtraia 4,836 .

4- De 10 inteiros subtraia 3,576

5- Efetue as seguintes multiplicações :

32,45 x 2,003   0,0709 x 0,08

458 x 0,605

6- Calcule com aproximação de 0,01 ,os quocientes das seguintes divisões :

0,0032 : 0,008   10,361 : 3,985

11,04375 : 4,75

7- Converter em números decimais, as frações :

$\frac{1}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{7}{60}$

8- Converter em frações ordinárias irredutíveis, os números decimais :

0,25   0,125   0,75

9- Calcule as expressões :

$\frac{0,004 \times 0,06}{0,8}$ Resp. 0,0003

$\frac{(2,08 + 3,24) - (1,02 - 0,008)}{(2,5 \times 0,4) - (0,12 : 0,3)}$

R : 7,48

$\frac{0,8 + 0,(6)}{0,(4) + \frac{1}{2}}$ Resp: $1\frac{47}{85}$

10- Dizer sem efetuar, se cada uma das frações seguintes, se converte em decimal exata, em dízima periódica simples ou dízima periódica composta :

$\frac{8}{12}$, $\frac{7}{15}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{71}{80}$, $\frac{9}{20}$, $\frac{3}{16}$, $\frac{5}{45}$

11- Determinar as frações geratrizes das dízimas periódicas seguintes :

2,(34)   3,0(2)   0,(35)   2,16(3)

12- Extrair as raízes quadradas com êrro menor do que 0,01, dos seguintes números :

2 ; 5 ; 8 ; 12 ; 15   3,458 ; 25,1; 3,5789.

XIII - CONSIDERAÇÕES GERAIS PARA MELHORAR A TÉCNICA DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

1- Inicialmente, faço questão de frisar que não existe nenhuma técnica especial, que possibilite a melhora de capacidade geral de resolução de problemas .

Isto é evidente, em face da diversidade das pessoas e das situações-problemas, bem como da falta de pesquisas com resultados mais objetivos, em relação ao procedimento .

No entanto, posso assegurar, levando em consideração a minha experiência e os estudos realizados sôbre o assunto, que se você perseverar no estudo e procurar compreender e aplicar as sugestões indicadas, sua habilidade será grandemente melhorada.

Tudo depende de você. Procure corrigir as suas próprias deficiências.

2- Quando fôr resolver um problema, proceda da seguinte forma :

a) Leia com atenção, procurando compreender bem o significado de todos os seus têrmos Pense bem, antes de começar a resolvê-lo, e, não o inicie, enquanto não estiver certo de que o entendeu .
b) Determine quais são os elementos dados e quais são os elementos procurados (incognitos).
c) Faça um diagrama se possível .
d) Procure compará-lo com outros problemas já conhecidos, isto é, resolvidos, bem como recorde a parte teórica, caso seja preciso
e) Estabeleça as relações, entre os elementos dados e os incógnitos .
f) Efetue os cálculos necessários numa sequência lógica, procurando compreender a razão de ser da cada operação, bem como o que obterá com cada uma delas .
g) Analise o resultado obtido, para ver se

êle está coerente com o enunciado do problema.

h) Verifique se os seus cálculos estão certos.

3- MÉTODOS DE RESOLUÇÃO

Os métodos de resolução dos problemas são:

Análise - Redução à unidade - Analogia - Gráfico

a - ANÁLISE

O método da análise consiste em você resolver o problema sistemàticamente, perguntando a si mesmo:

1) O que é dado?
2) O que é pedido?
3) Quais operações serão usadas?
4) Qual a resposta aproximada?

Polya, professor de Matemática da Universidade de Stanford, publicou um trabalho no qual fêz uma análise lógica do procedimento utilizado na resolução de um problema.

As etapas e operações mentais são as seguintes:

1) Compreensão do problema:

a- Qual é o desconhecido? Quais os dados? Qual a condição?

b- É possível satisfazer a condição? A condição é suficiente para determinar a incógnita? Que é insuficiente? Que é redundante ou contraditório?

c- Desenhe uma figura. Introduza anotações adequadas.

d- Separe as várias partes da condição. Pode escrevê-la?

2) Arquitetando um plano:

a- Encontre a ligação entre os dados e a incógnita. Você poderá ser obrigado a encontrar imediatamente uma ligação. Você poderá obter eventualmente um plano de soluções.

b- Já viu o problema antes? Já viu o mesmo problema de uma forma ligeiramente diferente?

c- Conhece um problema relacionado? Conhece um problema que poderá ser útil?

d- Olhe a incógnita. Tente pensar em um problema familiar, tendo a mesma ou semelhante incógnita.

e- Aquí está um problema relacionado com o seu e resolvido antes. Poderia usá-lo? Poderia usar seu resultado? Poderia usar seu método? Deveria introduzir algum elemento auxiliar de modo a tornar seu uso possível?

f- Poderia representar o problema? Poderia apresentá-lo ainda diferentemente? Vá às definições.

g- Se não resolver o problema, tente resolver primeiro algum problema relacionado. Poderia imaginar um problema relacionado, mais accesível? Um problema mais geral? Um mais especial? Um análogo? Poderia resolver parte do problema?

Mantenha só parte da condição, abandone o resto. Até onde fica a incógnita determinada, como pode variar? Poderia derivar alguma coisa útil dos dados?

Pode pensar em outros dados apropriados para determinar a incógnita? Pode mudar a incógnita, ou os dados, ou ambos se necessário, de modo que a incógnita e os dados fiquem mais perto um do outro?

h- Usou todos os dados? Usou tôda a condição? Levou em consideração tôdas as noções essenciais do problema?

3- Execução do plano

Ao executar seu plano de solução, comprove cada etapa. Vê claramente que a etapa é correta ? Pode provar que está correta ?

4- Recordação da solução obtida :

a) Pode comprovar o resultado ?
b) Pode comprovar o argumento ?
c) Pode obter o resultado de um modo diferente? Pode vê-lo de uma só vez ?
d) Pode usar o resultado ou o método para algum outro problema ?

Polya, no seu livro, diz : " Se o leitor está suficientemente familiarizado com a lista, e, pode ver por trás da sugestão, a ação sugerida, compreenderá que a lista enumera indiferentemente operações mentais, tipicamente úteis para a resolução de problemas " .

Acredito, que a análise traz grandes benefícios para o aluno, desde que seja usada conscientemente e sem afetação .

No começo, o aluno encontra um pouco de dificuldade, mas, com o passar do tempo, vai interessando-se, em face dos progressos que experimenta, para compreender um problema .

Vejamos agora alguns exemplos :

1- Determinar dois números inteiros, sabendo-se que sua soma é igual a 28 .

Solução : Lendo o problema, constatamos que o mesmo nos fornece exclusivamente a soma dos dois números inteiros . Será que êste dado é suficiente para determiná-los ?
Sentimos a necessidade de conhecer um dêles, ou uma relação entre os mesmos, não é verdade ?

Portanto, podemos concluir, em face da análise feita, que nosso problema apresenta uma solução indeterminada, pois, poderemos dar várias soluções. Quais ?

1 + 27   2 + 26   3 + 25   4 + 24   etc .

2- Determinar dois números inteiros e consecutivos, cuja soma é 29 .

Solução : Necessitamos saber, quais são os elementos dados .

a) A soma de dois números .
b) Os mesmos são inteiros e consecutivos .

Para resolver o problema, é necessário saber o que são números inteiros e consecutivos . Lembra-se ???

Já vimos que, são aquêles que diferem entre si, de uma unidade .

Logo, há um nº maior e um nº menor. Sabemos ainda que o maior tem uma unidade a mais que o menor . Se representarmos o menor por : □

o maior será : □

Temos então :

Maior + Menor

□ + □ = 29

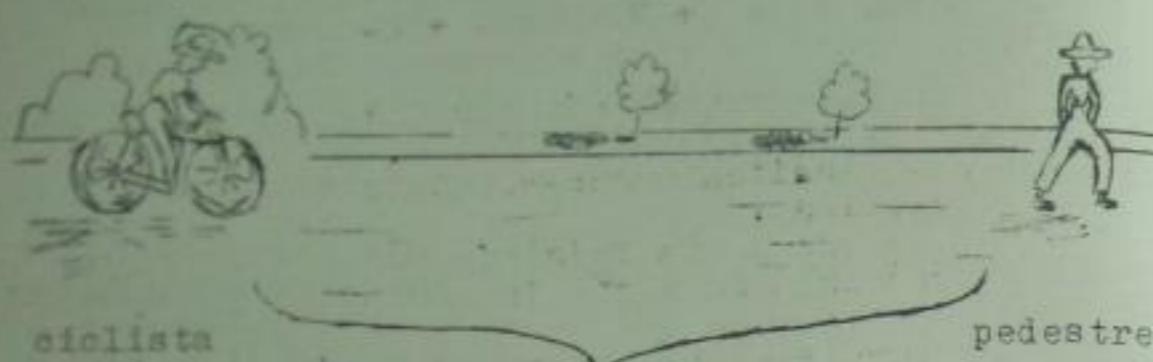
Saber que o maior tem uma unidade a mais do que o menor, é o mesmo que saber a diferença dos dois números . Portanto, o nosso problema pode ser enunciado de outra maneira, não é verdade ? Como ??

" A soma de dois números é 29, e a diferença é 1". Quais são os números ?

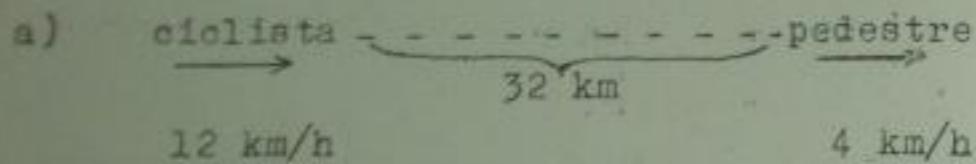
Você já viu algum problema igual a êste ?

Se não estiver lembrado, estude novamente o capítulo de subtração .

3- Um ciclista percorre 12 km por hora e um pedestre 4 km por hora. A distância que os separa é de 32 km. No fim de quantas horas será o pedestre alcançado ?

Vejamos a solução :

Poderíamos considerar as seguintes hipóteses, conforme o ciclista e o pedestre se deslocassem no mesmo sentido ou em sentidos contrários, mas, sempre na mesma direção.

HIPÓTESES

a) ciclista ⟶ - - - - - - - - - - - pedestre ⟶
32 km

12 km/h 4 km/h

Mesmo sentido - Mesma direção

Primeiro, é necessário saber quais são os elementos dados.

1- Velocidade do ciclista (12 km/h)
2- Velocidade do pedestre (4 km/h)
3- Distância entre o ciclista e o pedestre (32 km/h)

Agora, necessitamos analisar a possibilidade de nosso problema :

- Será que o ciclista pode alcançar o pedestre ? Quais as possibilidades ?
Pense bem !!!

Se a velocidade do ciclista fôsse menor do que a do pedestre, êste jamais seria alcançado, uma vez que a distância entre os dois iria aumentando.

Se a velocidade do ciclista fôsse igual a do pedestre, êste jamais seria alcançado, pois, a distância entre os mesmos permaneceria constante (sem variação).

Na nossa hipótese podemos afirmar que o pedestre será alcançado pelo ciclista.

Veja bem :

Quando numa hora o pedestre anda 4 km, o ciclista percorre 12 km. Portanto, se aproxima de 8 km, o que representa a diferença das velocidades.

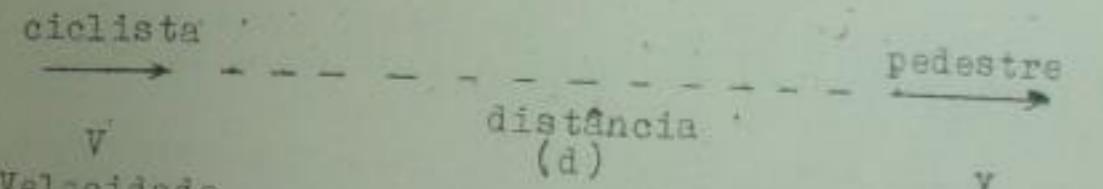
Então, por hora, o ciclista se aproximará da diferença das velocidades : 12 - 4=8

Se em cada hora o ciclista se aproximará de 8 km, então são necessárias tantas horas para se dar o encontro, quantas são as vêzes que 32 km (que é a diferença entre os dois) contém 8 km. 32 ÷ 8 = 4

Finalmente, podemos concluir que o encontro se dará no fim de 4 horas.

Poderíamos estabelecer uma fórmula, para resolver todos os problemas análogos a êste

Convencionemos :

ciclista ⟶ - - - - - - - - - - - - - pedestre ⟶

V distância (d)
Velocidade v velocidade

Em cada hora, um ciclista se aproxima da diferença das velocidades : V - v .

Isto sucede, porque o pedestre não colabora para o encontro, uma vez que foge do ciclista.

O tempo necessário para o encontro, será dado pelo número de vêzes que a distância contém a diferença de velocidades .

$$t = \frac{d}{V - v}$$

Esta expressão é o que em Matemática, chamamos de fórmula.

Ela indica as operações que devem ser realizadas com os elementos dados, para determinar o elemento incógnito.

Façamos uma tradução verbal da nossa expressão simbólica:

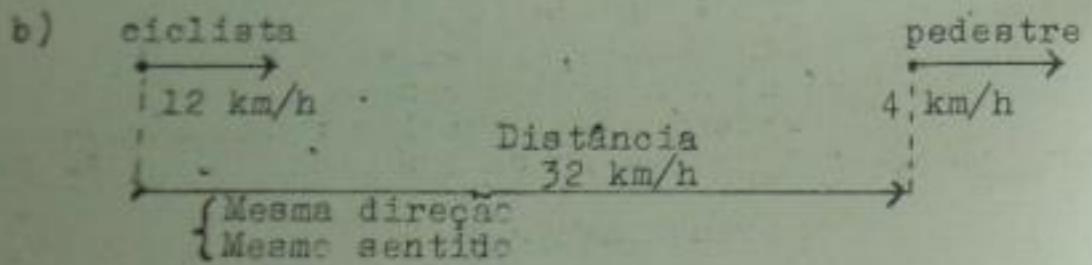
$$t = \frac{d}{V - v}$$

tempo → t; = é igual; d → distância entre os móveis; ← ao quociente; V, v ← velocidades; − diferença.

" O tempo é igual ao quociente da distância entre os móveis, pela diferença das velocidades ".

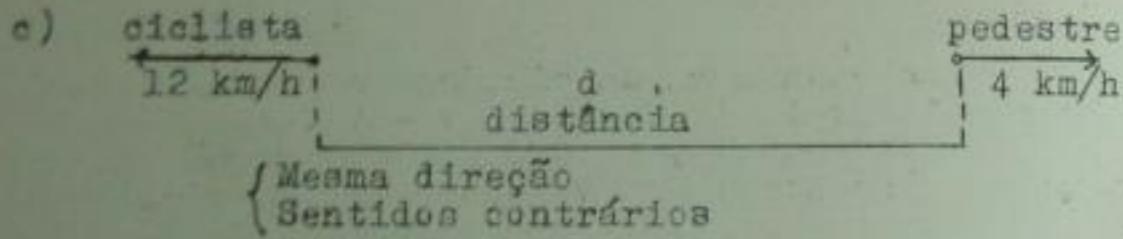
b) ciclista → 12 km/h — pedestre → 4 km/h

Distância 32 km/h

{Mesma direção
{Mesmo sentido

Nesta hipótese, o ciclista, jamais alcançará o pedestre, uma vez que, a distância que os separa aumenta de 8 km por hora.

c) ciclista ← 12 km/h — pedestre → 4 km/h

d
distância

{Mesma direção
{Sentidos contrários

Nesta hipótese, todos os dois estão colaborando, para o afastamento.

Em cada hora, a distância que os separa, aumenta da soma das velocidades.

Portanto: 12 + 4 = 16

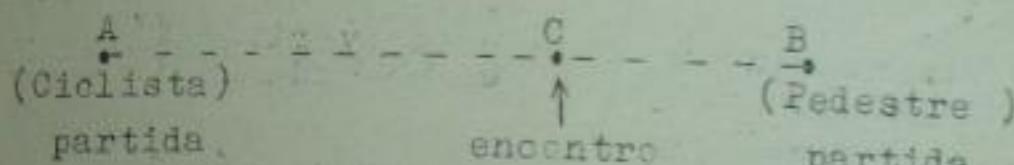
16 km por hora

O ciclista jamais alcançará o pedestre.

{Mesma direção
{Sentidos Contrários

Nesta hipótese, todos os dois estão colaborando para diminuir a distância que os separa. O ciclista contribue com 12 km, e o pedestre com 4 km por hora, para o encontro.

Estes se encontrarão num ponto mais próximo do local que partiu o pedestre, pois, o mesmo, desenvolve menor velocidade.

A (Ciclista) partida — C encontro — B (Pedestre) partida

Temos então, que a distância que os separa, diminue de 12 + 4 = 16 (16 km por hora)

São necessários 32 : 16 = 2, portanto, duas horas, para se verificar o encontro.

Poderíamos também, neste caso, estabelecer uma fórmula.

V - Velocidade do ciclista
v - velocidade do pedestre
d - distância entre os dois
t - tempo para o encontro

$$t = \frac{d}{V + v}$$

" Tempo igual ao quociente da divisão da distância, pela soma das velocidades ".

4- Dois trens partem ao mesmo tempo e em sentidos contrários, de duas cidade distantes 285 km uma da outra. Um trem percorre

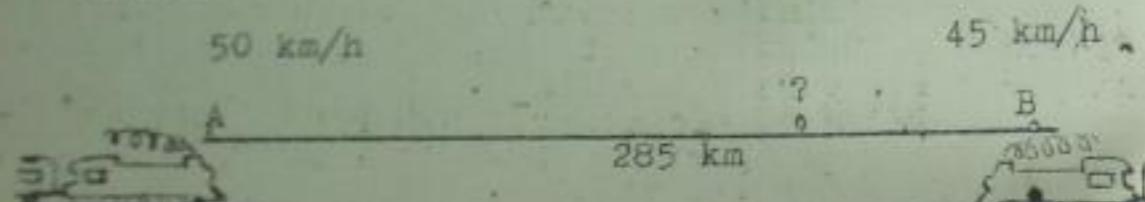
50 km por hora e o outro 45 km por hora .

a) No fim de duas horas, qual será a distância que separa os dois trens?
b) Quantas horas são necessárias para verificar-se o encontro ?
c) A que distância das duas cidades , os dois trens passarão um pelo outro ?

Solução :

50 km/h ... 45 km/h

A ... ? ... B

285 km

Observe que o encontro se verificará mais próximo da cidade B, pois a velocidade do trem que parte de A é maior .

1- Para responder a primeira pergunta, é muito simples. No fim de duas horas, os trens terão percorrido respectivamente :

$$50 \text{ km} \times 2 = 100 \text{ km}$$
$$45 \text{ km} \times 2 = 90 \text{ km}$$
$$190 \text{ km}$$

Os dois trens terão percorrido 190 km .

Se a distância entre as duas cidades é de 285 km, a distância entre os mesmos, depois de duas horas de viagem , será :

285 km - 190 km = 95 km .Entendeu ?

2- Os dois trens estão contribuindo para diminuir a distância que os separa. (Raciocínio já utilizado na hipótese d, do problema anterior .)

Temos :

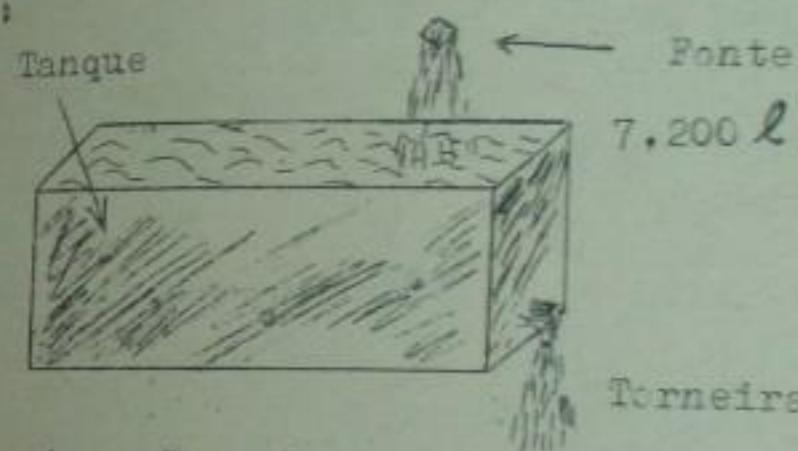
$$t = \frac{285}{45 + 50} = \frac{285}{95} = 3$$

Portanto, são necessárias 3 horas, para se verificar o encontro .

3- Calculemos as distâncias do ponto de encontro, às duas cidades : A e B

De A : 3 x 50 km = 150 km
De B : 3 x 45 km = 135 km

5- Um tanque cuja capacidade é de 7.200 litros, é alimentado por uma fonte que o pode encher em 18 horas, Há uma torneira que o esvazia em 24 horas. Estando o tanque prèviamente vazio, em quanto tempo a fonte pode enchê-lo, funcionando conjuntamente com a torneira ?

Solução :

Funcionando a fonte e a torneira juntas , o tanque só encherá se a quantidade que entra, fôr maior que a quantidade que sai .

Determinemos então, a quantidade de água , que fica por hora no tanque .

Necessitamos para isso, determinar a diferença entre a quantidade de água que a fonte despeja no tanque por hora e a quantidade dágua, que a torneira retira por hora .

E' muito fácil, pois, conhecemos a " capacidade do tanque " (7.200 ℓ) e os tempos necessários para enchê-lo (18 horas) e para esvaziar o (24 horas) tanque .

Temos :

a) 7.200 ÷ 18 = 400 -Portanto, a fonte despeja 400 litros por hora .

b) 7.200 ÷ 24 = 300 -A torneira retira 300 litros por hora .

c) 400 ℓ - 300 ℓ = 100 ℓ. -Por hora ficam 100 ℓ .

Por conseguinte, são necessárias tantas horas para a fonte encher o tanque, funcionando conjuntamente com a torneira, quantas são as vêzes que 7.200 ℓ, contém 100 litros .

Temos : 7.200 ÷ 100 = 72

Portanto, são necessárias 72 horas .

6- Escrevendo-se a sucessão dos números naturais sem separar os algarismos : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ...., o último algarismo ocupou o 1.236º lugar. Qual o último número escrito ?

Temos :

Solução :

1 2 3 4 5 6 7 8 9, 10.......... 99..............999

9 (1 algarismo) — 90 (2 algarismos) — 900 (3 algarismos)

Quais são os elementos dados ?

a- A sucessão dos números naturais
b- A quantidade de algarismos utilizados para escrever todos os números da sucessão considerada.

O que se procura ?

a- O valor do último número escrito
b- Se nós conhecemos a quantidade de algarismos usados, fàcilmente poderemos determinar se o número procurado é composto de 1, 2, 3, ou quatro algarismos.Basta raciocinar assim :

- Quantos algarismos necessitamos para escrever todos os números de 1 algarismo ?
  São nove números de 1 algarismo, portanto, nove algarismos .
  O número procurado não pode ter <u>um só</u> algarismo, pois, usamos na sucessão 1.236 sinais

- Será que êle tem dois algarismos ?
  Para escrever todos os números de 1 e 2 algarismos, necessitamos de :
  1 x 9 + 2 x 90 = 189 sinais
  Ainda é pouco !!

- Será que êle possue 3 algarismos ?
  Para escrever todos os números de um, dois e três algarismos, necessitamos de :
  1 x 9 + 2 x 90 + 3 x 900 = 2889 sinais .
  Esta quantidade de algarismos ultrapassa a que foi usada . Logo, podemos afirmar que nosso número possui três algarismos .

Necessitamos determinar agora, o seu valor . É muito simples, pois, se subtrairmos de : 1236 o número 189, encontraremos quantos algarismos foram usados para escrever os números de 3 algarismos !

1.236 - 189 = 1.047

Dividindo 1.047 por 3, encontraremos quantos números de 3 algarismos foram escritos .

1.047 ÷ 3 = 349 . Sabemos portanto, que foram escritos :

9 números de 1 algarismo
90 " de 2 "
349 " de 3 "

Quantos números foram escritos ?

9 + 90 + 349 = 448 .

Portanto, se a sucessão possui 448 números, à partir da unidade, o último é <u>448</u> .

b- <u>REDUÇÃO À UNIDADE</u>

O método de redução à unidade, é um dos raciocínios mais empregados na Aritmética .

Consiste em determinar em primeiro lugar, o valor de <u>uma parte</u> ou o preço de <u>um objeto</u> para depois determinar o valor de qualquer quantidade de partes ou o preço de objetos

É bem verdade, que necessitamos fazer também uma análise, para determinar as relações existentes entre os elementos dados, bem como qual a grandeza que devemos determinar primeiro.

O raciocínio ficará bastante esclarecido, com a resolução de alguns problemas.

1- A soma de dois números é 450 e o seu quociente 8. Achar os números.

Solução : Devemos em primeiro lugar, lançar mão de um raciocínio que nos possibilite determinar quantas vêzes 450 contém o valor do maior ou do menor. Temos :

Maior + Menor = 450
Maior : Menor = 8

Ora, se o maior dividido pelo menor, dá para quociente exato : 8, é porque o maior contém 8 vêzes o menor, ou o que é o mesmo :

O maior vale oito vêzes o menor.

Maior + Menor = 450
↓
8 Menor

Portanto, 450 contém nove vêzes, o valor do menor.

Temos : $450 \div 9 = 50$ → Menor

Como o maior vale oito vêzes o valor do menor, temos :

$50 \times 8 = 400$ → Maior

2- Uma pessoa comprou três objetos por Cr$ 270,00. O 2º custou o dôbro do primeiro e o 3º, o tríplo do segundo. Quanto custou cada um ?

Solução : Procuremos determinar quantos objetos iguais poderíamos comprar com os Cr$ 270,00.

Isto nos fornecerá o valor de um dos objetos. Obtido o custo de um dêles, fácil será determinarmos os preços dos outros.

Diz o problema :

a) Uma pessoa comprou três objetos por Cr$ 270,00. Portanto, podemos escrever :

Primeiro + Segundo + Terceiro = 270

b) O segundo custou o dôbro do primeiro.

Segundo = 2 primeiro

c) O terceiro, o tríplo do segundo.

Terceiro = 3 segundo

Temos reunindo :

Primeiro + Segundo + Terceiro = 270
↓ ↓
2 primeiro 3 segundo
↓
6 primeiro

Evidentemente, a pessoa em vez de comprar três objetos diferentes com os Cr$ 270,00, poderia ter comprado nove objetos iguais ao primeiro.

Logo :

Primeiro = $270 : 9 = 30$
Segundo = $2 \times 30 = 60$
Terceiro = $3 \times 60 = 180$

Resposta : Cr$ 30,00 Cr$ 60,00 Cr$180,00

3- Repartir Cr$ 300,00 entre três pessoas, de modo que a 1ª receba Cr$ 50,00 menos que a segunda, e Cr$ 20,00 mais que a terceira.

Solução :

Lendo o problema com atenção, você observa que, quem recebe mais é a segunda e menos a terceira.

Se a primeira recebe Cr$ 50,00 menos que a segunda, então podemos dizer que a segunda recebe Cr$ 50,00 mais do que a primeira. Podemos fazer o seguinte diagrama :

Primeira + Segunda + Terceira = 300

Segunda ↓ primeira + 50

Terceira ↓ Primeira - 20

Ou usando figuras :

Primeira + Segunda [50] + Terceira = 300

20

Observando, você estabelecerá com facilidade o raciocínio que deve utilizar para encontrar a parte de cada uma .Se tomássemos da segunda os 50, ela passaria a receber a mesma quantia da primeira.

Então, a soma das três passaria a ser : 300 menos a quantidade que tomei da segunda .

Primeira + Segunda [50] + Terceira

$$300 - 50 = 250$$

Se a terceira receber 20 mais, ficará com uma quantia igual à da primeira e a soma das três passaria a ser :

$$250 + 20 = 270$$

Primeira + Primeira + = 270

3 primeira

Então, 270 contém o tríplo da 1ª . Logo:

	$270 \div 3$	$= 90$
Primeira =	$90 + 50$	$= 140$
Segunda =	$90 - 20$	$= 70$
Terceira =		

Resposta : Cr$ 90,00   Cr$ 140,00 e Cr$ 70,00

4- Um aluno ganha 5 pontos por exercício que acerta e perde 3 pontos por exercícios que erra. Ao fim de 30 exercícios, tinha 110 pontos . Quantos acertou ? Quantos errou ?

Solução :

Se admitirmos que êle acertou todos os exercícios, quantos pontos deveria ganhar ?

Temos : $30 \times 5 = 150$

Mas, se êle só obteve 110 pontos ! Isto é uma prova de que errou exercícios . Então, quantos pontos deixou de ganhar ?

$$150 - 110 = 40$$

Êle deixou de ganhar 40 pontos. Como em cada exercício que errava, deixava de ganhar 5 e ainda perdia três, êle errou tantos exercícios, quantas são as vêzes que <u>40</u> contém <u>8</u> .

$$40 : 8 = 5$$

Resposta : <u>Errou</u> : 5   Acertou : $30 - 5 = 25$.

5- Num terreiro há galinhas e coelhos, num total de 45 cabeças e 128 pés. Quantos animais há de cada espécie ?

Solução : Admitamos que todos os animais do terreiro são <u>coelhos</u> . Nêste caso, quantos pés existiriam, levando em consideração que cada coelho tem 4 pés ?

$$45 \times 4 = 180$$

Como no terreiro só há 128 pés, precisamos determinar qual o excesso, de acôrdo com a nossa hipótese :

$$180 - 128 = 52$$

Necessitamos fazer com que êstes 52 pés desapareçam ; para isso, substituiremos os coelhos , por galinhas, pois, para cada substituição, o total

Temos : 100 ÷ 2 = 50 ⟶ Soma

será a metade do número dado.

Sabemos que o quádruplo de seu quociente é 36, logo, o quociente é a quarta parte.

36 : 4 = 9

O problema recaiu portanto, no caso estudado e poderíamos enunciar assim : " A soma de 2 números é igual a 50 e seu quociente 9. Achar os números ."

Temos, aplicando o mesmo raciocínio :

Maior + Menor = 50
Maior : Menor = 9
ou Menor + Maior = 50
9 menor

Então: Menor = 50 : 10 = 5
Maior = 9 x 5 = 45.

Resposta : Os números são 45 e 5 .

2- A idade de um pai e seu filho somam 90 anos ; se o filho nasceu quando o pai tinha 36 anos , quais são as idades atuais ?

Solução : Você já viu um problema análogo a êste ? Observe bem !!!

Se o filho nasceu quando o pai tinha 36 anos, pode ser traduzida sob a seguinte fórma: " A idade do pai excede a idade do filho, de 36 anos" ou então : " A diferença entre a idade do pai e do filho é de 36 anos " .

Portanto, o problema considerado poderá ser enunciado assim : Determinar dois números , sabendo-se que, a sua soma é igual a 90, e a diferença 36 .

Ora, êste problema já foi resolvido antes não é verdade ?

Temos : Maior + Menor = 90
Maior - Menor = 36

$$\text{Maior} = \frac{90 + 36}{2} = \frac{126}{2} = 63$$

$$\text{Menor} = \frac{90 - 36}{2} = \frac{54}{2} = 27$$

Podemos então concluir : As idades atuais são :

Pai: 63 anos Filho : 27 anos

3- Num banco , as moças ganham mensalmente : Cr$ 750,00 e os rapazes Cr$810,00 ; quantos rapazes e quantas moças há num grupo de 39 funcionários, cujos ordenados somam Cr$ 30,050,00.

Solução :

Você já viu algum problema análogo a êste ? Lembra-se do raciocínio empregado no problema nº 5, de redução à unidade ? " Num terreiro há galinhas e coelhos, num total de 45 cabeças e 128 pés. Quantos animais há de cada espécie ?

Observe bem que, se nós quisermos, poderemos enunciar o problema dado, sob a seguinte forma : " Num terreiro há duas espécies de animais, num total de 39 cabeças e 30,030 pés; Quantos animais há de cada espécie ?

NOTA : Um grupo de animais tem 750 pés e o outro 810 pés .

É evidente que o problema dos coelhos e galinhas, não precisava desta nota, uma vez que todo mundo sabe que uma galinha tem dois pés e um coelho tem 4 .

Percebida a analogia, poderemos usar o mesmo raciocínio .

Admitamos que todos os funcionários do banco são rapazes ; neste caso, qual seria a soma dos ordenados ?

Cr$ 810,00 x 39 = Cr$ 31,590,00

Como a soma dos ordenados é Cr$ 30.030,00, de acordo com precisamos determinar qual o excesso,

dadca e as incógnitas .

Vejamos alguns diagramas que podemos fa-
zer :

1) Uma pessoa comprou três objetos por Cr$ 108,00 . O segundo custou o dôbro do primeiro e o terceiro o triplo do segundo. Quanto custou cada um ?

Admitindo que, o valor do primeiro objeto seja representado por : ☐ Teremos :

a) Primeiro diagrama

= Cr$ 108,00

b) Segundo diagrama

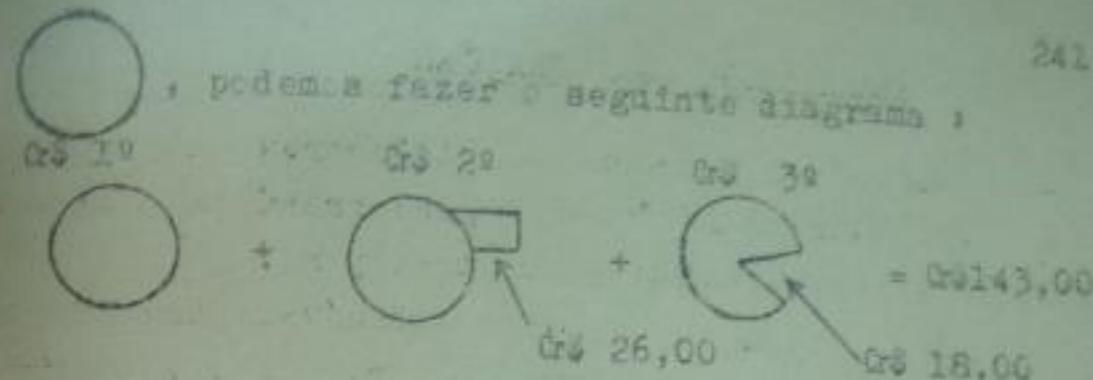
c) Terceiro diagrama

1º objeto + 2º objeto + 3 objeto =Cr$ 108,00

2 x 1º 3 x 2º

6 x 1º

2) Repartir Cr$ 143,00 entre 3 pessoas, de modo que a primeira receba Cr$ 26,00 menos que a segunda e Cr$ 18,00 mais que a terceira .

Representando o valor da primeira por :

Olhando o diagrama, você sente imediatamente que a segunda ganha Cr$ 26,00 mais que a primeira e esta Cr$ 18,00 mais que a terceira .

3) Um vendedor ambulante vendeu a um freguês, a metade das laranjas que possuía mais duas ; a um segundo freguês vendeu a metade do resto mais 3 ,ficando sem nenhuma .
Quantas laranjas tinha o vendedor ?

Solução : Admitamos que o total de laranjas seja representado por :

I

Ao primeiro freguês vendeu metade, mais duas laranjas, logo :

II ← resto

Ao segundo freguês vendeu metade do resto mais 3, ficando sem nenhuma .

Ora, se a metade do resto é 3, então, o resto é o dôbro : 2 x 3 = 6 . A metade do total de laranjas é o resto 6, mais 2 que êle deu ao 1º freguês .

III ← resto

Portanto, a metade das laranjas que êle possuía é igual a oito (8). Logo, êle possuía :
2 x 8 = 16

Resposta : 16 laranjas .

PROBLEMAS COM FRAÇÕES

1- Um automóvel percorre 60 kilômetros em $\frac{3}{4}$ de hora. Quantos kilômetros percorrerá em 4 horas?

Solução : Representamos uma hora por :

$\frac{3}{4}$ de hora

Hora

60 km

Se o automóvel percorre em $\frac{3}{4}$ de hora 60 km, em $\frac{1}{4}$ de hora, quanto percorre - rá ? 60 km : 3 = 20

Em 4 horas percorre quatro vêzes, o que percorrerá numa hora : 4 x 20 km = 80 km.

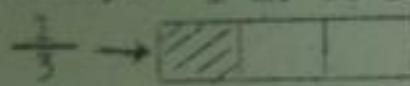
4 x 80 km = 320 km

2- Um terço de metro de lã custa : Cr$ 36,00. Quanto custarão dois terços do metro ?

Solução : 1 m. de lã

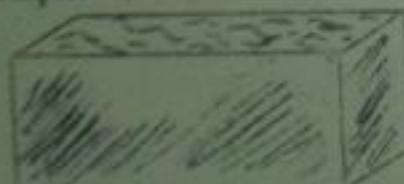
$\frac{1}{3}$ →

Cr$ 36,00

Ora, se $\frac{1}{3}$ do metro de lã custa Cr$ 36,00; é evidente que o preço de $\frac{2}{3}$ é o dôbro.

2 x Cr$ 36,00 = Cr$ 72,00

3- Um reservatório cheio dágua contém 24 litros. Quantos litros conterão $\frac{5}{6}$ do reservatório ?

Solução : 24 ℓ

Observe bem !! O reservatório cheio dágua, contém 24 litros. Pergunta-se : quantos litros contém $\frac{5}{6}$ do reservatório ?

Inicialmente, necessitamos saber qual a quantidade dágua, que um sexto do reservatório contém 24 litros.

Temos : 24 ℓ : 6 = 4 ℓ Logo, $\frac{5}{6}$ conterão : 5 x 4 ℓ = 20 ℓ .

4- A soma de dois números é 120. O menor vale $\frac{2}{3}$ do maior .

Solução : Maior + Menor = 120

↓

$\frac{2}{3}$ do maior

Maior				Menor		
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	+	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	= 120

Fàcilmente, podemos concluir que , 120 corresponde a $\frac{5}{3}$ do maior .

Logo, $\frac{1}{3}$ do maior é igual a :

120 ÷ 5 = 24

Maior = 3 x 24 = 72

Menor = 2 x 24 = 48

5- A diferença de dois números é 125. O menor é $\frac{1}{6}$ do maior. Quais são êsses números ?

Solução : Maior - Menor = 125

↓

$\frac{1}{6}$ do maior

Maior								
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	-	$\frac{1}{6}$	= 125

Fácil concluir que a diferença, corresponde a $\frac{5}{6}$ do maior .

Logo, $\frac{1}{6}$ do maior é igual :

$$125 : 5 = 25$$

$$\begin{cases} \text{Maior} = 6 \times 25 = 150 \\ \text{Menor} = 25 \end{cases}$$

6- O produto de duas frações é $13\frac{1}{2}$ e um dos fatôres é $\frac{3}{4}$. Qual o outro fator ?

Solução :

$$N \times \frac{3}{4} = 13\frac{1}{2}$$

Qual o número que multiplicado por $\frac{3}{4}$ dá : $13\frac{1}{2}$.

Para determinar o fatôr desconhecido, basta dividir o produto pelo fator conhecido.

$$N = 13\frac{1}{2} \div \frac{3}{4} = \frac{\overset{9}{\cancel{27}}}{\underset{1}{\cancel{2}}} = \frac{\overset{2}{\cancel{4}}}{\underset{1}{\cancel{3}}} = \underline{18}$$

7- Achar o número que, somado com 20, aumenta o seu valor de $\frac{5}{12}$.

Solução :

Número + 20 = Número + $\frac{5}{12}$ do Número

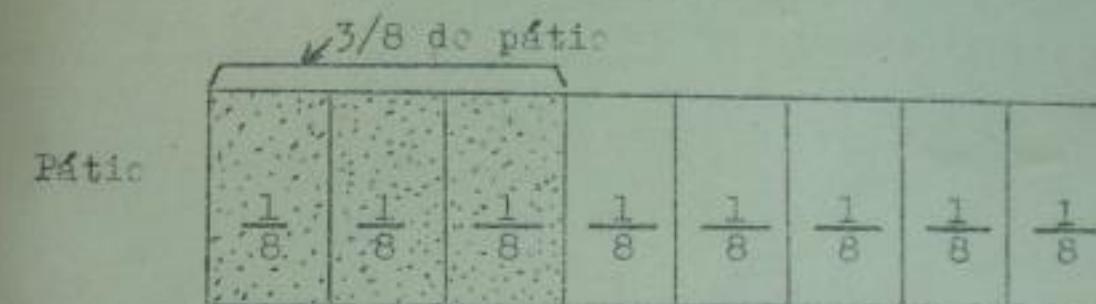
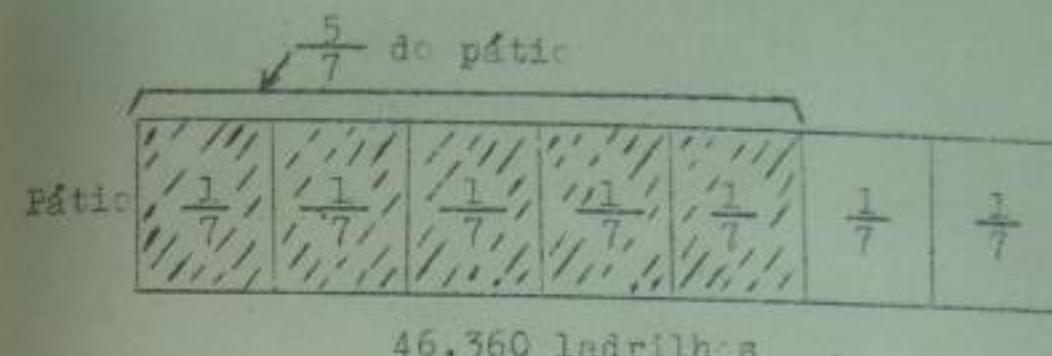
Observando a igualdade, podemos concluir que 20 corresponde a 5/12 do número.
Logo, 1/12 do número é igual a :

$$20 : 5 = 4$$

Número = $12 \times 4 = \underline{48}$

8- Para ladrilhar $\frac{5}{7}$ de um pátio, empregaram-se 46.360 ladrilhos. Para ladrilhar $\frac{3}{8}$ do mesmo pátio, quantos ladrilhos iguais serão necessários ?

Solução :

46.360 ladrilhos

Quantos ladrilhos ?

Devemos fazer o nosso problema por etapas.

a) Determinar quantos ladrilhos são necessários, para ladrilhar $\frac{1}{7}$ do pátio.

b) Determinar quantos ladrilhos são necessários, para ladrilhar o pátio todo.

c) Determinar quantos ladrilhos são necessários, para ladrilhar $\frac{1}{8}$ do pátio.

d) Finalmente, determinar quantos ladrilhos são necessários para ladrilhar $\frac{3}{8}$ do pátio.

Solução : a) $\frac{1}{7}$ do pátio $= 46.360 \div 5 =$
$= 9.272$

Portanto, necessitamos de 9.272 ladrilhos, para ladrilhar $\frac{1}{7}$ do pátio.

b) O pátio todo = 7 x 9272 = 64.904

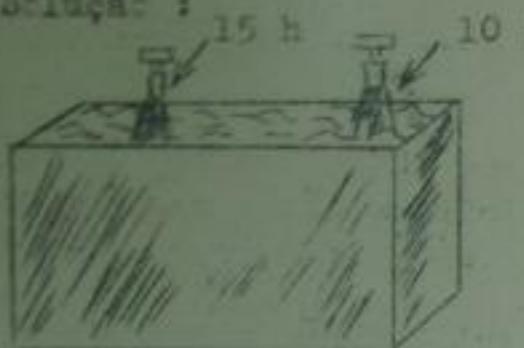
c) $\frac{1}{8}$ do pátio = 64.904 ÷ 8 = 8.113

Necessitamos portanto, 8.113 ladrilhos para ladrilhar 1/8 do pátio.

d) $\frac{3}{8}$ do pátio = 3 x 8.113 = 24.339

Portanto, necessitamos 24.339 ladrilhos para ladrilhar 3/8 do pátio.

9- Um reservatório é alimentado por duas (2) torneiras. A primeira pode enchê-lo em 15 horas e a segunda em 10 horas. A primeira é conservada aberta durante 2/3 da hora e a segunda durante 1/2 hora.
Que fração do reservatório ficará cheia ?

Solução :

A primeira pode enchê-lo em 15 h, logo, numa hora enche 1/15 do tanque.

Em $\frac{2}{3}$ de hora

$$\left(\frac{1}{15} : 3 \right) \times 2 =$$

$$= \frac{1}{15} \times \frac{1}{3} \times 2 = \frac{2}{45}$$

A segunda torneira pode encher o tanque em 10 horas, logo, numa hora enche 1/10 do tanque.

$$\text{Em } \frac{1}{2} \text{ h} \longrightarrow \frac{1}{10} : 2 = \frac{1}{10} = \frac{1}{2} = \frac{1}{20}$$

As duas torneiras : $\frac{2}{45} + \frac{1}{20} = \frac{8+9}{180} = \frac{17}{180}$

Resposta: $\frac{17}{180}$ do reservatório.

10- Um operário faz um serviço em 6 dias e um segundo operário em 12 dias. Se trabalhassem juntos, em quantos dias poderão concluir o serviço ?

Solução :

Necessitamos determinar qual a fração do serviço que os dois operários, trabalhando juntos executam por dia.

Temos : <u>Primeiro operário</u>

6 dias. Num dia $\frac{1}{6}$ do serviço.

<u>Segundo operário</u>

12 dias. Num dia $\frac{1}{12}$ do serviço.

<u>Os dois operários trabalhando juntos</u> :

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{2+1}{12} = \frac{3}{12}$$

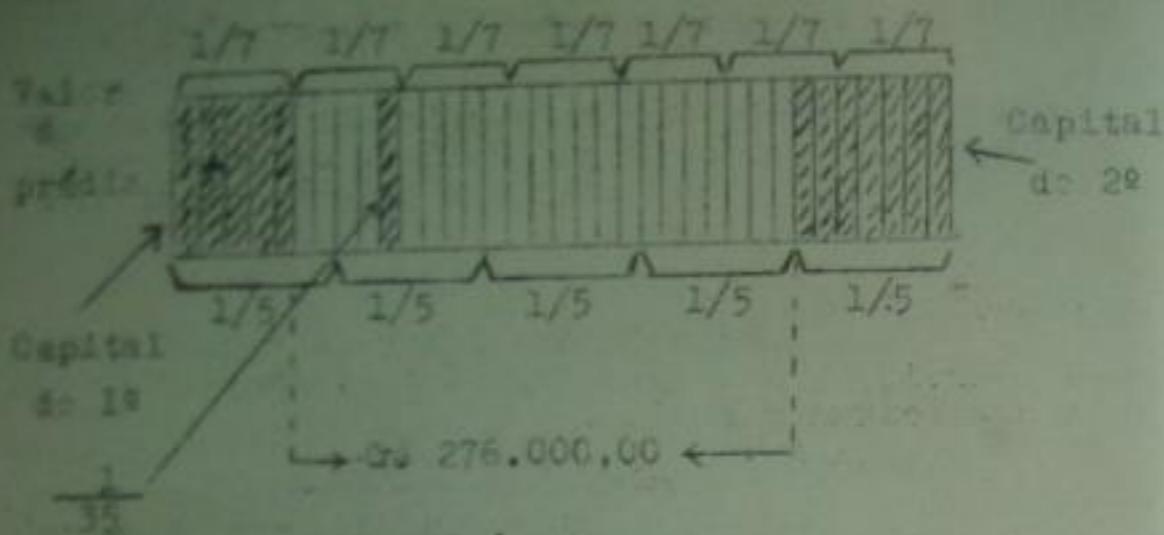
Portanto, por dia executam 3/12 do serviço. É evidente que, para executar o serviço todo, êles necessitam de tantos dias, quantas são as vêzes que <u>12</u> contém <u>3</u>.

$$12 \,\underline{|\, 3}$$
$$0 \quad 4$$

Resp. 4 dias.

11- Dois amigos desejam comprar um prédio. Um dêles tem 1/5 do valor e o outro 1/7. Juntando ao total Cr$ 276.000,00, poderiam comprar o prédio ?

Qual o preço do prédio ?

Vejamos como podemos resolver o problema :

Logo, Cr$ 276.000,00 correspondem a :

$\frac{23}{35}$ do preço total.

$\frac{1}{35}$ do preço total = 276.000,00 : 3=

```
276000 | 3
 46      12.000
  0
```

Preço total = 35 x 12.000 = 420.000

Resposta : Cr$ 420.000,00

VEJAMOS OUTRA SOLUÇÃO.

Primeiro = 1/5 do valor total

Segundo = 1/7 do valor total

Primeiro + Segundo = $\frac{1}{7} + \frac{1}{5} =$

$= \frac{7+5}{35} = \frac{12}{35}$

Para comprar o prédio êles necessitam ainda:

$\frac{23}{35}$ do total que corresponde a : Cr$ 276.000,00

Logo : $\frac{1}{35}$ ⟶ 276000 | 23 → 12000
46
0

TOTAL (Valor do prédio) 35 x 12.000 = 420.000

Resp. Cr$ 420.000,00

§§§§§§§§§§§§§§

PROBLEMAS PARA RESOLVER

1- O dôbro de dois números é 100 e o quádruplo de seu quociente é 36. Achar os números.
Resp. 45 e 5

2- Se a um número acrescento 23, subtraio 41 desta soma e a diferença multiplico por 2, obtenho 132. Qual o número ?
Resp. 84

3- Comprei certo número de pássaros e gaiolas. Se eu pusesse 1 pássaro em cada gaiola, 18 pássaros ficariam sem gaiola ; porém, se eu pusesse 3 em cada gaiola, haveria lugar para mais 6 pássaros. Quantos pássaros e quantas gaiolas comprei ?
Resp. 12 gaiolas e 30 pássaros

4- Determinar quantos passageiros viajam em certo ônibus, sabendo que, se dois passageiros ocupassem cada banco, 26 ficariam de pé e que, se três passageiros se sentassem em cada banco, dois bancos ficariam vazios .
Resp. 90 passageiros

5- Dois jogadores entram num jôgo. O primeiro com Cr$ 29,00 e o segundo com Cr$ 31,00. Depois de uma partida ganha pelo segundo, êste tem quatro vêzes mais dinheiro que o primeiro. Quanto ganhou nesta partida ?
Resp. Cr$ 17,00

6- Uma pessoa dá esmolas à certo número de pobres; dando Cr$ 24,00 a cada um , ficaria com Cr$ 15,00 porém, para dar Cr$ 30,00, faltar-lhe-ia Cr$21,00 Quanto possui a pessoa e quantos são os pobres?
Resp. Cr$ 159,00 ; 6 pobres

7- Calcular o valor de certa fortuna que foi repartida entre três pessoas, sabendo que a primeira recebeu 2/5 dela, mais Cr$ 6.000,00 ; que a segunda recebeu 1/3 mais Cr$ 9.000,00 e que a terceira recebeu os Cr$ 33.000,00 restantes .
Resp. Cr$ 180.000,00

8- Uma pessoa gastou 1/3 da quantia que possuia e em seguida 3/5 do resto. Ficou com Cr$ 80,00 . Quanto possuia ?
Resp. Cr$ 300,00

9- Dividir Cr$ 480,00 entre três pessoas , de modo que, as partes da primeira e da segunda sejam respectivamente 1/3 e 4/5 da que a terceira recebeu .
Resp. Cr$ 75,00 ; Cr$ 180,00; Cr$ 225,00

10- Esvazia-se um reservatório dágua de 1/3 de seu conteúdo e mais 15 litros. O reservatório ficou cheio até os 3/5. Quantos litros dágua tinha o reservatório ?
Resp. 225 litros

11- Dois comerciantes contribuiram com capitais iguais, para formar uma sociedade. Se dissolverem a sociedade, um perdeu 2/3 da sua entrada e o outro perdeu sòmente 3/5 da sua entrada . Sabendo-se que êste último se retirou com : Cr$ 800,00, a mais que o 1º; pergunta-se qual foi a importância que cada um contribuiu para a sociedade .
Resp. Cr$ 12.000,00

12- Uma herança de Cr$ 101.500,00 deve ser dividida entre três pessoas, de modo que a parte da primeira, corresponda aos 2/5 da parte da 2ª e aos 3/4 da parte da terceira. Quanto toca a cada uma das três pessoas ?
Resp. Cr$ 21.000,00 ; Cr$ 52.500,00; Cr$ 28.000,00

13- Num colégio há 210 alunos. A metade do número de meninas é igual a 1/5 do número de meninos. Quantos meninos há no colégio ?
Resp. 60 meninas
150 meninos

14- Um homem gastou de uma vez 0,125 de seu dinheiro e de outra vez 0,45 e ainda de outra 0,2 . Que dinheiro tinha, sabendo-se que ainda tem Cr$ 900,00 .
Resp. Cr$ 4.000,00

$$$$$$$$$$$$$$$$$$

CURSO ARAÚJO DE MATEMÁTICA
Av. Conde da Boa-Vista, 767
Diretor: Prof. Waldecyr Cti.de Araújo

CARACTERÍSTICAS DO CURSO ESPECIAL DE MATEMÁTICA

1- DESDE QUANDO FUNCIONA O CURSO ESPECIAL DE MATEMÁTICA ?

Êste Curso, vem funcionando desde 1957, com grande êxito. É frequentado por professôres de Matemática, professôres do primário, médicos, agrônomos, estudantes de colégios, comerciários, bancários, militares, alunos de Faculdades, funcionários públicos, técnicos de rádio e televisão, mecânicos, eletricistas, etc. Muito indicado para os jovens que terminaram o ginásio .

2- QUAIS AS RAZÕES DÊSSE ÊXITO ?

É um Curso moderno, pois utiliza auxílios áudio-visuais, Material Cuisenaire, Geo- Aritmo , Geo-planos,Algeblo, quadros murais, projeções em côres e as técnicas sugeridas pelos grandes psicólogos e didatas de todo o mundo. Porisso, pode ser frequêntado por pessoas que não gostam da Matemática e que não possuam " base", bem como por aquêles que possuem grandes conhecimentos, gostam muito de Matemática e desejam apenas um maior aperfeiçoamento .

3- POR QUE NECESSITO APRENDER MATEMÁTICA ?

Porque a Matemática é de vital importância na vida moderna e para a escolha de sua profissão futura, pois, se você aspira um diploma superior , dos 13 Cursos Universitários, 9 (nove) dependem de Matemática. Por outro lado, lembramos que a Matemática é matéria eliminatória nos concursos para o ingresso em organizações Bancárias, Comerciais e Escolas Militares.

4- TURNOS : Manhã - Tarde - Noite

DEPARTAMENTO DE PUBLICAÇÕES DO CURSO ARAÚJO DE MATEMÁTICA .